مسابقة في مادة الرياضيات — الاسم:
المدة: ساعة ونصف — الرقم:

ملاحظة: - يتكوّن هذا الامتحان من ست مسائل، يجب اختيار **أربع مسائل** منها فقط.
- في حال الإجابة عن أكثر من أربع مسائل، عليك شطب الإجابات المتعلّقة بالمسألة التي لم تعد من ضمن اختيارك، لأنّ التصحيح سيقتصر على إجابات المسائل الأربع الأولى غير المشطوبة.
- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- QCM (5 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

Nº	Questions	Réponses proposées		
		a	b	c
1	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+2}{e^x+1} =$	$+\infty$	1	2
2	Le domaine de définition de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{\ln(x-4)}{x-5}$ est	$]0;+\infty[$	$]4;+\infty[$	$]4;5[\cup]5;+\infty[$
3	La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(2+e^{-x})$ est	$\frac{-1}{1+2e^x}$	$\frac{1}{2+e^{-x}}$	$-e^{-x}$
4	Une urne contient 7 boules : 4 rouges et 3 noires. On tire au hasard successivement et avec remise 4 boules de l'urne. Le nombre de tirages possibles de 3 boules rouges et une noire est	72	768	192
5	Le nombre de solutions de l'équation $(\ln x)^2 = 4\ln x$ est	0	1	2

II- Probabilité (5 points)

Dans une université, une étude sur l'utilisation des applications AI : COPILOT et GEMINI montre que :

- 60% des élèves utilisent COPILOT, parmi eux 30% utilisent GEMINI.
- 40% des élèves n'utilisent pas COPILOT, parmi eux 50% utilisent GEMINI.

Un élève est choisi au hasard de cette université.
On considère les événements suivants :

C : « L'élève choisi utilise COPILOT »
G : « L'élève choisi utilise GEMINI ».

1) **a)** Montrer que la probabilité $P(C \cap G) = 0{,}18$ et calculer $P(\overline{C} \cap G)$.
b) Calculer $P(G)$.

2) Sachant que l'élève choisi n'utilise pas GEMINI, calculer la probabilité qu'il utilise COPILOT.

3) Calculer $P(C \cup G)$.

4) Le nombre des élèves de cette université est 400.
a) Montrer que le nombre d'élèves qui utilisent COPILOT et GEMINI est 72.
b) On choisit au hasard et simultanément 4 élèves. Calculer la probabilité qu'un élève exactement parmi les 4, utilise COPILOT et GEMINI.

III- Probabilité (5 points)

U et V sont deux urnes :

- U contient 3 boules rouges et 2 boules noires.
- V contient 3 boules rouges et 3 boules noires.

On choisit au hasard une des deux urnes puis de l'urne choisie on tire au hasard et simultanément 3 boules.

On considère les événements suivants :

U : « L'urne choisie est U »

R : « Les trois boules tirées sont rouges ».

1) **a)** Calculer la probabilité P(R / U) et déduire que $P(R \cap U) = \frac{1}{20}$.

b) Calculer $P(R \cap \overline{U})$ et montrer que P(R) = 0,075.

2) Sachant que les trois boules tirées ne sont pas rouges, calculer la probabilité qu'elles soient tirées de l'urne U.

3) On place les boules des deux urnes U et V dans une même urne W puis on tire de W au hasard successivement et sans remise 3 boules.

a) Vérifier que le nombre total de cas possibles est 990.

b) Calculer la probabilité d'avoir au moins une boule rouge parmi les trois boules tirées.

IV- Fonctions (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x-2)e^{-x} + 2$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1) **a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et calculer f(–2,5).

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Déduire une asymptote (d) à (C).

2) **a)** Montrer que $f'(x) = (x+1)e^{-x}$ puis dresser le tableau de variations de f.

b) Calculer f(0) et montrer que f(x) = 0 admet, sur $]-\infty;-1[$, une solution unique α.

c) Vérifier que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$.

3) Calculer f(–2) puis tracer (d) et (C).

4) Soit g la fonction donnée par $g(x) = \ln[f(x) - 2]$.

a) Déterminer le domaine de définition de g.

b) Montrer que g est strictement décroissante.

V- Fonctions (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + x + 1$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soit (d) la droite d'équation $y = x + 1$.

1) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$. Déduire une asymptote à (C).

2) **a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que (d) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

3) Copier et compléter le tableau de variations de f suivant :

x	0		$+\infty$
f '(x)		+	
f(x)			

4) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Vérifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

5) Tracer (d) et (C).

VI- Fonctions Exponentielles et Intégrales (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1 - e^{-x}) - 1$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soit (d) la droite d'équation $y = x - 1$.

1) Calculer $f(-1{,}5)$.

2) **a)** Montrer que (d) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

3) Copier et compléter le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	+	
f(x)	$+\infty$				$+\infty$

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β tels que $-0{,}9 < \alpha < -0{,}8$ et $1{,}3 < \beta < 1{,}4$.

5) Tracer (d) et (C).

6) **a)** Calculer $f'(x) + f(x)$.

b) Calculer, en fonction de α, l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعة ونصف	الاسم: الرقم:

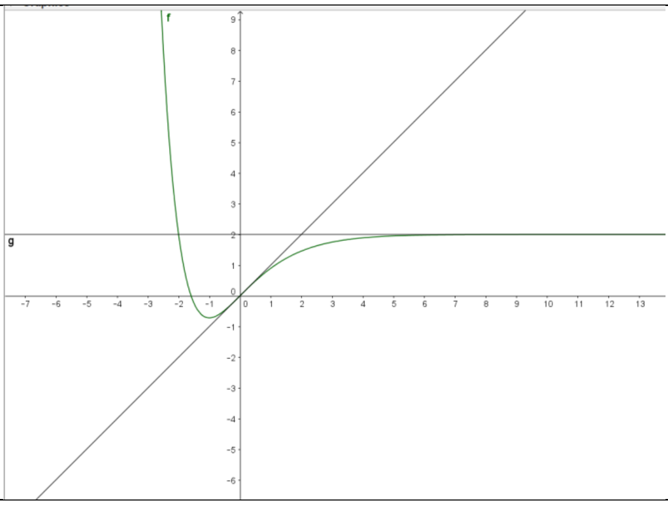
مشروع أسس التصحيح

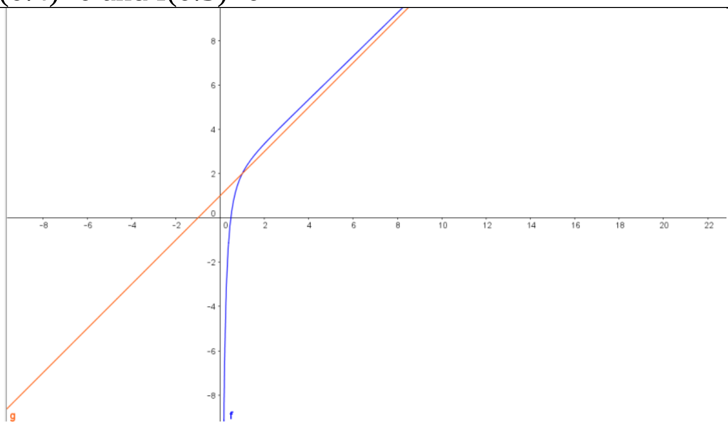
	Q1: Réponses	7.5 pts
1	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{0+2}{0+1}=2$ Answer : c	1.5
2	$f(x)=\frac{\ln(x-4)}{x-5}$ is defined for $\begin{cases}x-4>0\\x-5\neq 0\end{cases}$ so $\begin{cases}x>4\\x\neq 5\end{cases}$ Thus, $x\in\,]4;5[\,\cup\,]5;+\infty[$ Solution: c	1.5
3	$f'(x)=\frac{-e^{-x}}{2+e^{-x}}=\frac{-1}{2e^{x}+1}$ Answer: a	1.5
4	RRRB, then $4^3\times 3^1\times\frac{4!}{3!}=768$ Answer: b	1.5
5	$\ln^2(x)=4\ln(x)$, then $\ln(x)\,(\ln(x)-4))=0$, then $\ln(x)=0$ or $\ln(x)=4$ Then $x=1$ or $x=e^4$ Answer: c	1.5

	Q2: Réponses	7.5 pts
1a	$P(G/C)=0.3$ $P(C\cap G)=P(G/C)\times P(C)=(0.3)(0.6)=0.18$ $P(\overline{C}\cap G)=P(G/\overline{C})\times P(\overline{C})=(0.5)(0.4)=0.2$	1.5
1b	$P(G)=P(C\cap G)+P(\overline{C}\cap G)=0.18+0.2=0.38$	0.75
2	$P(C/\overline{G})=\dfrac{P(C\cap\overline{G})}{P(\overline{G})}=\dfrac{0.6\times 0.7}{1-0.38}=\dfrac{21}{31}$	1.5
3	$P(C\cup G)=P(C)+P(G)-P(C\cap G)=0.6+0.38-0.18=0.8$	1.5
4a	$P(C\cap G)=0.18$ Then $N=0.18\times 400=72$	0.75
4b	P(1 out of 4 uses both AI's) = $\frac{C_{72}^{1}\times C_{328}^{3}}{C_{400}^{4}}=0.399$	1.5

	Q3: Réponses	7.5 pts
1a	$P(R/U) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$ $P(R \cap U) = P(R/U) \times P(U) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$	1.5
1b	$P(R/V) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$ $P(R \cap \overline{U}) = P(R/V) \times P(V) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{40}$ $P(R) = P(R \cap U) + P(R \cap V) = P(R/U) \times P(U) + P(R/V) \times P(V) = 0.075$	2.25
2	$P(U/\overline{R}) = \frac{P(U \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{P(U) - P(U \cap R)}{1 - P(R)} = \frac{18}{37}$	1.5
3a	$A_{11}^3 = 990$	0.75
3b	$P(\text{at least one red}) = 1 - P(\text{none is red}) = 1 - \frac{A_6^3}{A_{11}^3} = \frac{29}{33}$	1.5

	Q4: Réponses	7.55 pts
1a	$\lim\limits_{x \to -\infty} [(-x-2)e^{-x}+2] = (+\infty)(+\infty) + 2 = +\infty$ $f(-2{,}5) = 8{,}09$	1.5
1b	$\lim\limits_{x \to +\infty} [(-x-2)e^{-x}+2] = \lim\limits_{x \to +\infty} [(-x)e^{-x} - 2e^{-x}+2] = 2$ Then y=2 is the equation of a horizontal asymptote to (C) at $+\infty$	0.75
2a	$f'(x) = -e^{-x} - (-x-2)e^{-x} = (-1+x+2)e^{-x} = (x+1)e^{-x}$ <table><tr><td>x</td><td></td><td>-1</td><td></td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>|</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>|</td><td>→</td></tr></table> f(-1)= -e+2	1.5
2b	f(0)= 0	0.75
2c	Since f is continuous and strictly decreasing over $]-\infty, -1[$ from $+\infty$ to -e+2<0 then f(x)=0 has a unique solution over this interval x=0. Since f is continuous and strictly increasing over $]-1, +\infty[$ $from -e+2 < 0$ to $2 > 0$ then f(x)=0 has a unique solution α .	0.5
3	$f''(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = e^{-x}(-x)$ Since f''(x) vanishes and changes sign at x=0 from positive to negative the (C) has an inflection point O(0,0)	0.75
4a	The equation of the tangent to (C) at x=0 is: y=f'(0)(x-0)+f(0)=x	0.75
4b		0.75

5		1.5
6a	g is defined for f(x)>2 that is for x<-2	0.5
6b	$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)-2}$ For x<-2, f'(x) is negative anf f(x)-2 >0 so g'(x)<0 . Thus g is always decreasing	0.5

	Q5: Réponses	5 pts
1	$\lim_{x\to0^+}[(\frac{lnx}{x}+x+1]=\frac{-\infty}{0}+0+1=-\infty$ thus the y-axis is a vertical asymptote for (C)	1
2a	$\lim[\frac{lnx}{x}+x+1]=$ 0+ +∞ +1= +∞	1
2b	$\lim_{x\to+\infty}[\frac{lnx}{x}+x+1-x-1]=\lim_{x\to0^+}[\frac{lnx}{x}]=0$ Thus, (d) is an asymptote to (C) at +∞	1
2c	Since $\frac{lnx}{x}>0\ for\ x>1$ then (C) is above (d) for x>1	1
3	$\begin{array}{c\|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & & \nearrow & \end{array}$	0.5
4a	Since f is continuous and strictly increasing over $]0,+\infty[$ from $-\infty$ to $+\infty$ then f(x)=0 has a unique solution ∝.	1
4b	f(0.4)<0 and f(0.5)>0	0.5
5	 (C) and (d) intersect at (1,2)	1.5
6a	f(∝) $=0$ then $\frac{ln\propto}{\propto}+\propto+1=0$ so $ln\propto+\propto^2+\propto=0$ thus $ln\propto=-\propto-\propto^2$	0.5

6b	$f(\propto^2) = \frac{\ln(\propto^2)}{\propto^2}+\propto^2+1 = \frac{2ln\propto}{\propto^2}+\propto^2+1 = \frac{2(-\propto^2-\propto)}{\propto^2}+\propto^2+1 = -2-\frac{2}{\propto}+\propto^2+1$ $f(\propto^2) -\propto^2 = -1-\frac{2}{\propto} < 0$	0.5

	Q6: Réponses	5 pts
1	$\lim_{x\to-\infty} [x(1-e^{-x})-1] = +\infty - 1 = +\infty$ $\quad f(-1{,}5) = 4{,}22$	1
2a	$\lim_{x\to+\infty} [x(1-e^{-x})-1] = \lim_{x\to+\infty} [x-(x)e^{-x} - 1 = +\infty$	1
2b	$\lim_{x\to+\infty} [x(1-e^{-x})-1-x+1] = \lim_{x\to+\infty} [-x(e^{-x})] = 0$ Thus, (d) is an asymptote to (C) at $+\infty$	1
2c	$f(x)-x+1= -xe^{-x}$ (C) is above (d) for $x>0$ (C) is below (d) for $x<0$ (C) and (d) intersect at (0,1)	1
3a	$f'(x) = 1-e^{-x}+xe^{-x}$ f(0)=0	1
3b	<table><tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>↗</td></tr></table>	0.5
4)		
4	The tangent to (C) is parallel to (d) then f '(x)=1 So $e^{-x}(x-1)=0$ so x=-1 and y=-e+2 (T): y=1(x+1)-1/e+2	1
5		1
6a	$f'(x)+f(x) = 1-e^{-x}+xe^{-x}+x-1-xe^{-x} = -e^{-x}+x$	0.5
6b	$A = \int_0^1 f(x) =$	0.5