مسابقة في مادة الرياضيات | **الاسم:**
المدة: ساعة ونصف | **الرقم:**

ملاحظة: - يتكوّن هذا الامتحان من ست مسائل، يجب اختيار **أربع مسائل** منها فقط.
- في حال الإجابة عن أكثر من أربع مسائل، عليك شطب الإجابات المتعلّقة بالمسألة التي لم تعد من ضمن اختيارك، لأنّ التصحيح سيقتصر على إجابات المسائل الأربع الأولى غير المشطوبة.
- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- خيار من متعدد (5 علامات)

في الجدول التالي يوجد إجابة واحدة فقط صحيحة من بين الاجابات المقترحة لكل سؤال. اكتب رقم كل سؤال وبرر إجابتك.

الرقم	السؤال	الإجابات المقترحة		
		a	b	c
1	$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+2}{e^x+1} =$	$+\infty$	1	2
2	مجال الدالة f المعرفة بالشكل $f(x)=\frac{\ln(x-4)}{x-5}$ هو	$]0;+\infty[$	$]4;+\infty[$	$]4;5[\cup]5;+\infty[$
3	مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ على الشكل $f(x)=\ln(2+e^{-x})$ هي	$\frac{-1}{1+2e^x}$	$\frac{1}{2+e^{-x}}$	$-e^{-x}$
4	صندوق يحتوي على 7 كرات: 4 كرات حمراء و3 كرات سوداء. عدد مرات اختيار 3 كرات حمراء وكرة واحدة سوداء بطريقة عشوائية وعلى التوالي مع إرجاع هو	12	768	288
5	عدد حلول المعادلة $(\ln x)^2=4\ln x$ هو	0	1	2

II- الاحتمال (5 علامات)

أُجريت دراسة في إحدى الجامعات حول استخدام تطبيقَي الذكاء الاصطناعي "COPILOT" و "GEMINI"، وبيّنت النتائج الآتي:
- 60% من الطلاب يستخدمون تطبيق "COPILOT"، و30% منهم يستخدمون تطبيق "GEMINI".
- 40% من الطلاب لا يستخدمون تطبيق "COPILOT"، و 50% منهم يستخدمون تطبيق "GEMINI".

تم اختيار طالب واحد من الثانوية.
لتكن الأحداث الآتية:
C: "يستخدم الطالب الذي تم اختياره تطبيق COPILOT"
G: "يستخدم الطالب الذي تم اختياره تطبيق GEMINI"

1) أ- برهن أن الاحتمال $P(C\cap G)=0.18$ واحسب $P(\bar{C}\cap G)$.
ب- احسب $P(G)$.
2) إذا علمت أن الطالب الذي تم اختياره لا يستخدم تطبيق GEMINI. فاحسب احتمال أن يكون يستخدم تطبيق COPILOT.
3) احسب $P(C\cup G)$.
4) عدد الطلاب في الجامعة 400.
أ- برهن أن 72 طالبًا يستخدمون تطبيقي COPILOT و GEMINI معًا.
ب- تم اختيار 4 طلاب بطريقة عشوائية وفي الوقت نفسه من الجامعة. احسب احتمال أن يكون واحد واحد فقط من بين الطلاب الأربعة يستخدم التطبيقين COPILOT و GEMINI

III- الاحتمال (5 علامات)

يوجد صندوقان U و V.

- يحتوي الصندوق U على 3 كرات حمراء اللّون، وكرتين سوداوتين.
- يحتوي الصندوق V على 3 كرات حمراء اللّون، و 3 كرات سوداء.

يتم اختيار صندوق عشوائيًّا، ثم يتم اختيار 3 كرات بطريقة عشوائية وفي الوقت نفسه من الصندوق الذي تم اختياره..

لتكن الأحداث الآتية:

- U: "الصندوق الذي تم اختياره هو الصندوق U"
- R: "الكرات الثلاث المسحوبة جميعها حمراء".

١) أ. احسب الاحتمال $P(R / U)$ ثم استنتج أن $P(R \cap U) = \frac{1}{20}$.

ب. احسب $P(R \cap \overline{U})$ وبرهن أن $P(R) = 0.075$.

٢) الكرات الثلاث المسحوبة ليست حمراء. احسب احتمال أن تكون كلها مسحوبة من الصندوق U.

٣) تم وضع كل الكرات من الصندوقين في صندوق واحد W، ثم سحب 3 كرات بطريقة عشوائية وواحدة تلو الأخرى دون إرجاع من W.

أ. بيّن أن عدد المرات الممكنة هو 990 مرة.

ب. احسب احتمال سحب كرة حمراء واحدة على الأقل من بين الكرات الثلاث المسحوبة.

IV- الدوال (5 علامات)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ على الشكل $f(x) = (-x - 2)e^{-x} + 2$ وليكن (C) بيان الدالّة f في المستوي الإحداثي العائد للنظام $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ- حدّد $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ واحسب $f(-2.5)$.

ب- برهن أن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$. استنتج المقارب (d) للبيان (C).

2) أ- برهن أن $f'(x) = (x + 1)e^{-x}$ ثمّ أرسم جدول المتغيّرات للدالة f.

ب- احسب $f(0)$ وبرهن أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذر واحد فقط α على الفترة $]-\infty; -1[$.

ج- بيّن أن $-1.5 < \alpha < -1.6$.

3) احسب $f(-2)$، ثم ارسم (d) و (C).

4) لتكن g الدالة المعرفة على الشكل $g(x) = \ln[f(x) - 2]$

أ- حدد مجال الدالة g.

ب- بين أن الدالة g متناقصة.

V- الدوال (5 علامات)

لتكن الدالة f المعرفة على الفترة $]0 ; +\infty[$ على الشكل $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x + 1$ وليكن (C) بيان الدالّة f في المستوي الإحداثي العائد للنظام $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

ليكن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = x + 1$.

1) أ- حدّد $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$. استنتج مقارب للبيان (C).

2) أ- حدد $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

ب- برهن أن (d) مقارب للبيان عند $+\infty$

ج- أدرس موقع (C) بالنسبة (d) بدلالة كل قيم x.

3) انسخ الجدول وأكمله:

x	0		$+\infty$
f '(x)	‖	+	
f(x)	‖		

4) أ- برهن أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذر واحد فقط α.

ب- بيّن أن $0.4 < \alpha < 0.5$.

5) ارسم (d) و (C).

VI- الدوال الأسية والتكامل (5 علامات)

لتكن الدالة f المعرفة على الفترة $\mathbb{R}$ على الشكل $f(x) = = x(1 - e^{-x}) - 1$ وليكن (C) بيان الدالّة f في المستوي الإحداثي العائد للنظام $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

ليكن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = x - 1$.

1) احسب $f(-1.5)$.

2) أ- برهن أن (d) مقارب للبيان (C) عند $+\infty$.

ب- ادرس موقع (C) بالنسبة إلى (d) بدلالة كل قيم x.

3) انسخ الجدول وأكمله:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		–	0	+	
f(x)	$+\infty$				$+\infty$

4) - برهن أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذران α و β فقط حيث $-0.8 > \alpha > -0.9$ و $1.4 > \beta > 1.3$

5) ارسم (d) و (C).

6) أ. احسب $f'(x) + f(x)$.

ب- احسب مساحة المنطقة المحاطة بالبيان (C), المحور السيني، والمحور الصادي، والمستقيم ذي المعادلة $x = \alpha$.