وزارة التربية والتعليم العالي — امتحانات الشهادة الثانوية العامة — دورة العام ٢٠٢٣ العاديّة
المديريّة العامّة للتربية — فرع: علوم الحياة — الاثنين ١٠ تموز ٢٠٢٣
دائرة الامتحانات الرسميّة

عدد المسائل: ثلاث	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعة ونصف	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

I- (4 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N°	**Questions**	**Réponses proposées**		
		a	**b**	**c**
1	La solution de l'équation $2\ln(x) = \ln(25)$ est	5	$\frac{25}{2}$	-5
2	On considère la fonction f définie sur $]e\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 3 - \frac{3\ln x}{1-\ln x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. (C) admet deux asymptotes d'équations	$x = 1$ et $y = x - 3$	$x = e$ et $y = x$	$x = -e$ et $y = x - 3$
3	Le tableau ci-dessous est le tableau de variations d'une fonction f continue sur $[0\,;+\infty[$. $\begin{array}{c\|ccccccc} x & 0 & & 1 & & e & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & 5 & \searrow & -2 & \nearrow & 3 & \searrow & -1 \end{array}$ L'image de l'intervalle $I = [1\,;+\infty[$ par f est	$[-2\,;3]$	$[-2\,;-1[$	$]-1\,;3]$
4	Un code est un nombre formé de trois chiffres en utilisant les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Le nombre de codes possibles pairs et plus grand ou égaux à 300 est	280	350	500

II- (6 points)

Durant la crise économique au Liban, une étude menée auprès d'un groupe d'enseignants a montré que :

- 30 % travaillent actuellement à l'étranger, parmi eux :
  - 40 % enseignent seulement dans des écoles privées.
  - 20 % enseignent seulement dans des écoles publiques.
  - Le reste des enseignants commencent à travailler dans un autre domaine.
- Parmi ceux qui sont restés au Liban :
  - 50 % enseignent seulement dans des écoles privées.
  - 40 % enseignent seulement dans des écoles publiques.
  - Le reste des enseignants ont pris leur retraite et ne travaillent plus.

On interroge au hasard un membre de ce groupe et on considère les événements suivants :
A : « le membre interrogé travaille actuellement à l'étranger »
R : « le membre interrogé enseigne seulement dans des écoles privées »
U : « le membre interrogé enseigne seulement dans des écoles publiques »
D : « le membre interrogé travaille dans un autre domaine »
N : « le membre interrogé a pris sa retraite et ne travaille plus ».

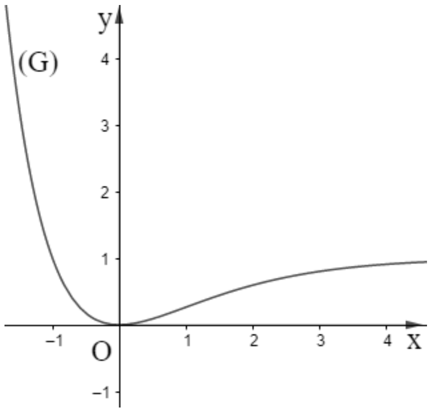
1) **a)** Calculer les probabilités $P(A \cap R)$ et $P(\overline{A} \cap R)$.
b) Vérifier que $P(R) = 0{,}47$.
2) Calculer $P(U)$.
3) Montrer que la probabilité que le membre interrogé est en train d'enseigner ou de travailler dans un autre domaine est 0,93.
4) Le membre interrogé n'enseigne pas dans des écoles privées.
Calculer la probabilité qu'il soit resté au Liban.
5) Ce groupe compte 500 enseignants.
a) Montrer que le nombre d'enseignants qui enseignent dans des écoles privées est 235.
b) On interroge au hasard trois membres de ce groupe.
Calculer la probabilité qu'au moins deux membres enseignent dans des écoles privées.

III- (10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

La courbe (G) ci-contre est la courbe représentative d'une fonction g dérivable sur $]-\infty\,;+\infty[$.



(G) est tangente à l'axe des abscisses en O.

1) En utilisant la courbe (G) :
a) Vérifier que $g(x) \geq 0$ pour tout réel x.
b) La fonction g' est la dérivée de g.
Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de g'.
2) On sait que $g(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ où a et b sont deux nombres réels, montrer que $a = b = -1$.

Partie B

On considère la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = (x + 2)e^{-x} + x$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f.
Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et calculer $f(-2{,}5)$.
2) **a)** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
b) Montrer que la droite (D) est une asymptote à (C).
c) Etudier, suivant les valeurs de x, la position de (C) par rapport à (D).
3) Montrer que $f'(x) = g(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.
4) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur $\mathbb{R}$, une solution unique α.
b) Vérifier que $-1{,}7 < \alpha < -1{,}6$.
5) **a)** Montrer que (C) admet un point d'inflexion W dont on déterminera ses coordonnées.
b) Montrer que la droite (T) d'équation $y = 2$ est la tangente en W à (C).
6) Tracer (T), (D) et (C).
7) On considère la fonction h définie sur $]-2\,;0[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x+2) - \ln(-x)}{x}$.
Montrer que $h(\alpha)$ est un entier naturel à déterminer.

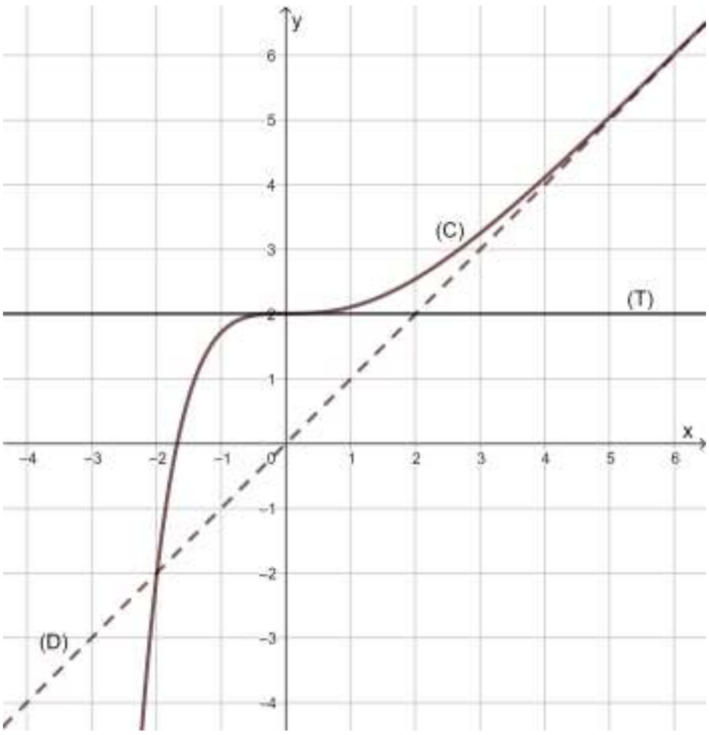
عدد المسائل: ثلاث

اسس تصحيح مادة الرياضيات

I	Réponses	Note 4 pts
1	$\ln x^2 = \ln 25$; $x > 0$ $x^2 = 25$ donc $x = 5$ Réponse: a	1
2	$\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = e - 3 - \frac{3}{0^+} = -\infty$, donc $x = e$ est une asymptote verticale. OU: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = -3 + 3 = 0$, donc $y = x$ est une asymptote oblique en $+\infty$. Réponse: b	1
3	f change de variation sur $I = [1; +\infty[$, donc $f(I) = [\min(f); \max(f)] = [-2; 3]$. Réponse: a	1
4	Nombre de codes pairs et plus grand ou égaux à 300 est: $7 \times 10 \times 5 = 350$. Réponse: b	1

II	Réponses	Note 6 pts
1a	$P(A \cap R) = P(A) \times P(R/\overline{A}) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$ $P(\overline{A} \cap R) = P(\overline{A}) \times P(R/\overline{A}) = 0.7 \times 0.5 = 0.35$	0.5 0.5
1b	$P(R) = P(A \cap R) + P(\overline{A} \cap R) = 0.12 + 0.35 = 0.47$ vérifié	0.5
2	$P(U) = P(A \cap U) + P(\overline{A} \cap U) = 0.3 \times 0.2 + 0.7 \times 0.4 = 0.34$	1
3	$P(\text{enseigner ou travailler dans un autre domaine}) = 0.3 + 0.7 \times 0.5 + 0.7 \times 0.4 = 0.93$	1
4	$P(\overline{A}/\overline{R}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap R)}{1 - P(R)} = \frac{0.7 - 0.35}{1 - 0.47} = \frac{35}{53}$	1
5a	Nombre d'enseignants qui enseignent dans des écoles privées = $P(R) \times 500 = 0.47 \times 500 = 235$	0.5
5b	$P(\text{qu'au moins deux membres enseignent dans des écoles privées}) =$ $\frac{235C2 \times 265C1 + 235C3}{500C3} \approx 0.455$	1

III	Réponses	Note 10 pts
A1a	sur $]-\infty; +\infty[$, (G) est au-dessus de x'x et le coupe en O , donc $g(x) \geq 0$ pour tout x.	0.5
A1b	Si $x \in]-\infty; 0[$, (G) est strictement décroissant, donc $g'(x) < 0$. Si $x \in]0; +\infty[$, (G) est strictement croissant, donc $g'(x) > 0$. Si $x = 0$, $g'(x) = 0$.	0.5
A2	$g(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ $g(0) = 0$, donne $b + 1 = 0$, donc $b = -1$ $g'(x) = (a - ax + 1)e^{-x}$ $g'(0) = 0$, donne $a + 1 = 0$, donc $a = -1$	0.5
B1	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \times +\infty - \infty = -\infty - \infty = -\infty$ $f(-2.5) \approx -8.59$	0.5 0.25

B2a	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{e^x}+x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}+x\right) = 0+\infty = +\infty$ (Règle de l'Hopital)	**0.5**
B2b	$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{e^x} = 0$ (déjà démontré). Donc (d): $y = x$ est une asymptote à (C).	**0.5**
B2c	$f(x) - y_D = (x+2)e^{-x}$ Si $x \in]-\infty;-2[$, (C) est au dessous de (D). Si $x \in]-2;+\infty[$, (C) est au dessus de (D). (C) coupe (D) au point $(-2;-2)$.	**1**
B3	$f'(x) = (1-x-2)e^{-x}+1 = (-x-1)e^{-x}+1 = g(x)$ donc f' a même signe que g, donc $f'(x) \geq 0$. $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & + & \\ \hline f(x) & -\infty & & \nearrow & & +\infty \end{array}$	**0,5** **0,5**
B4a	Sur $]-\infty;+\infty[$; f est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point , alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.	**0.5**
B4b	$f(-1.7) \approx -0.05 < 0$ et $f(-1.6) \approx 0.38 > 0$ donc, $-1.7 < \alpha < -1.6$	**0.5**
B5a	$f''(x) = g'(x) = xe^{-x}$. Donc, $f''(x) = 0$ pour x= 0 en changeant de signe du négative au positive, alors (C) admet pour $x = 0$ un point d'inflexion W de coordonnées $(0\,;2)$.	**1**
B5b	$f'(0) = g(0) = 0$, donc la tangente à (C) au point $x = 0$ est parallèle à l'axe des abscisses. Donc, $f(0) = 2$ alors l'équation de cette tangent est $y = 2$. Donc (T): $y = 2$ est tangente à (C) en $W(0\,;2)$.	**0.5**
B6		**1.25**
B7b	$f(\alpha) = 0$ donne $(\alpha+2)e^{-\alpha}+\alpha = 0$, alors $e^{-\alpha} = \frac{-\alpha}{\alpha+2}$, donc $-\alpha = \ln(\frac{-\alpha}{\alpha+2})$, alors $\ln(\alpha+2) - \ln(-\alpha) = \alpha$. Donc, $h(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+2)-\ln(-\alpha)}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$.	**1**