امتحانات الشهادة الثانويــة العامة
فرع: العلوم العامة

دورة العام ٢٠٢٤ العاديّة
الأربعاء ٣ تموز ٢٠٢٤

مسابقة في مادة الرياضيات — الاسم:
المدة: ثلاث ساعات — الرقم:

ملاحظة: - يتكوّن هذا الامتحان من سبع مسائل، يجب اختيار **خمس مسائل** منها فقط.
- في حال الإجابة عن أكثر من خمس مسائل، عليك شطب الإجابات المتعلّقة بالمسألة التي لم تعد من ضمن اختيارك، لأنّ التصحيح سيقتصر على إجابات المسائل الخمس الأولى غير المشطوبة.
- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- Fonctions et Nombres complexes (4 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

Nº	Questions	Réponses proposées		
		a	b	c
1	Le domaine de définition de la fonction f donnée par $f(x) = \ln(e^x - e^3)$ est	$]3\,;+\infty[$	$]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[$	$]0\,;3[\cup]3\,;+\infty[$
2	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^{2x}+x} =$	$+\infty$	0	1
3	Si x est un nombre réel non nul, alors $\left\lvert\dfrac{1+ix}{x+i}\right\rvert =$	1	$\dfrac{x+1}{x-1}$	$\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
4	L'ensemble de solutions de l'inéquation $e^{-2x} - 1 < 0$ est	$]0\,;+\infty[$	$]-\infty\,;+\infty[$	$]-\infty\,;0[$
5	Le nombre de solutions de l'équation $e^{\ln(x+1)} = \ln(e^{x^2+x})$ est	0	1	2

II- Probabilité (4 points)

U et V sont deux urnes.

- U contient 4 boules rouges et 2 boules noires.
- V contient 3 boules rouges et 2 boules noires.

Partie A

Un joueur lance un dé parfait cubique contenant 6 faces numérotées 1, 2 ,3 ,4 ,5 et 6.

- Si le numéro de la face supérieure du dé est 5, le joueur tire au hasard et simultanément 3 boules de U.
- Sinon, le joueur tire au hasard successivement et avec remise 3 boules de V.

On considère les évènements suivants :

A : « La face supérieure du dé est 5 »
R : « Les trois boules tirées sont rouges »
M : « Les trois boules tirées sont de même couleur ».

1) **a)** Calculer la probabilité P(R / A) et en déduire que $P(R \cap A) = \frac{1}{30}$.
   b) Vérifier que $P(R / \overline{A}) = \frac{27}{125}$ et calculer P(R).
2) **a)** Calculer P(M / A) et $P(M / \overline{A})$.
   b) Déduire que $P(M) = \frac{4}{15}$.
3) Sachant que les trois boules tirées sont de même couleur, calculer la probabilité que le numéro de la face supérieure du dé ne soit pas 5.

Partie B

Dans cette partie, on tire au hasard **1** boule de U et **2** boules successivement et sans remise de V.
Calculer la probabilité de tirer exactement une boule rouge parmi les trois boules tirées.

III- Nombres complexes (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, M et M′ d'affixes $z_A = -i$, $z_M = z$ et $z_{M'} = z'$ tel que $z' = \dfrac{i}{\bar{z} - i}$ avec $z \neq -i$.

1) Déterminer la forme exponentielle de z' dans le cas où $z = 1 - i$.
2) a) Montrer que $\overline{z'}(z + i) = -i$.
   b) Montrer que $OM' \times AM = 1$ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) - (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}) = \dfrac{-\pi}{2}\,[2\pi]$.
   c) Montrer que : si M varie sur le cercle de centre A et de rayon 2, alors M′ se déplace sur un cercle à déterminer.
   d) Montrer que : si M′ varie sur l'axe des ordonnées privé de O, alors M varie sur une droite à déterminer.
3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x′ et y′ sont des nombres réels.
   a) Montrer que $x' = \dfrac{-y-1}{x^2 + (y+1)^2}$ et $y' = \dfrac{x}{x^2 + (y+1)^2}$.
   b) Montrer que : si M se déplace sur la droite d'équation $y = -x - 1$ privée de A, alors M′ se déplace sur une droite dont on déterminera son équation.

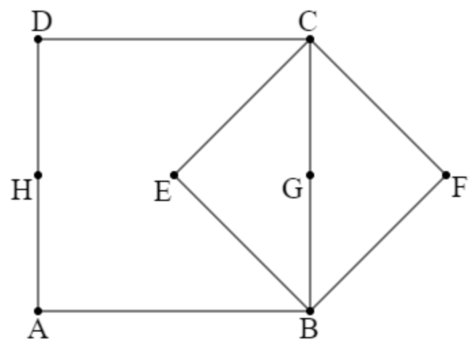
IV- Transformations (4 points)

Dans la figure ci-contre, on a :

- ABCD et EBFC sont deux carrés directs de centres respectifs E et G.
- H est le milieu de [AD].

Soit S la similitude plane directe de centre I qui transforme C en B et D en G.

$\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ est un angle de S et k est son rapport.



Partie A

1) Vérifier que $k = \dfrac{1}{2}$.
2) Montrer que S(A) = E.
3) a) Montrer que l'image de (CF) par S est (BF) et déterminer l'image de (AD) par S.
   b) Les deux droites (AD) et (CF) se coupent en un point L. Montrer que S(L) = F.
   c) Déduire que ILF est un triangle rectangle.
4) Soit Q le milieu de [AB].
   a) Montrer que S(B) = Q.
   b) Montrer que les trois points I, Q et C sont alignés.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

1) Montrer que la forme complexe de S est $z' = -\dfrac{1}{2}iz + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.
2) Déterminer la forme algébrique de l'affixe du centre I de S.

V- Fonctions (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{1 - xe^{-x}}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire les deux asymptotes à (C).
2) **a)** Montrer que $f'(x) = \frac{2e^{-x}(1 - x)}{(1 - xe^{-x})^2}$.
   b) Déduire que f '(x) et (1 – x) ont le même signe.
   c) Dresser le tableau de variations de f.
3) (C) admet un point d'inflexion W(0 ; 2) .
   Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point W.
4) Tracer (T) et (C).
5) Soit h la fonction donnée par $h(x) = \ln[(f(x) - 2)^2]$.
   a) Déterminer le domaine de définition de h.
   b) Etudier le sens de variation de h sur $]-\infty ; 0[$.

VI- Fonctions (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x - \ln(x + 1)$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (d) la droite d'équation y = x.

1) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$. Déduire une asymptote à (C).
2) **a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   b) Montrer que (d) est une asymptote à (C) en $+\infty$.
   c) Montrer que (C) est en dessous de (d) pour tout $x \in]0 ; +\infty[$.
3) **a)** Vérifier que $f'(x) = 1 + \frac{1}{x(x + 1)}$.
   b) Dresser le tableau de variations de f.
4) **a)** Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α.
   b) Vérifier que $0,8 < \alpha < 0,9$.
   c) L'équation f(x) = 2 admet une solution unique β. Montrer que $\alpha < \beta$.
5) Tracer (d) et (C).
6) On considère la fonction g donnée par $g(x) = \ln\left(\frac{f(x)}{f(x) - 2}\right)$.
   Déterminer le domaine de définition de g.

VII- Suites numériques et Intégrales (4 points)

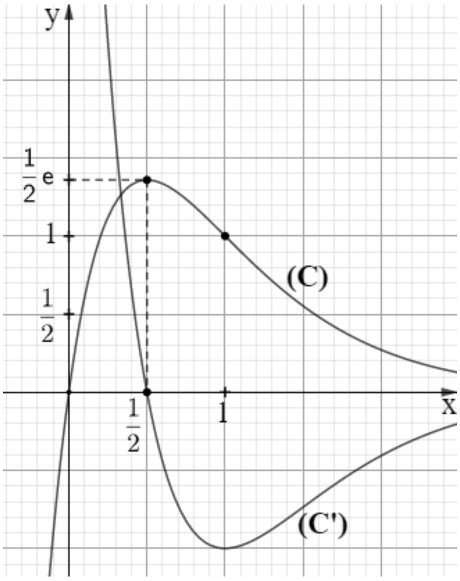
Les quatre parties suivantes sont indépendantes.

1) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \int_2^3 e^{-x}(x-2)^n dx$ où n est un entier naturel et $n \geq 1$.
Montrer que la suite (V_n) est décroissante.

2) Calculer l'intégrale $\int (x^2 + x + 1)e^{-2x} dx$.

3) On considère la suite convergente (U_n) définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \dfrac{3U_n - 4}{U_n - 2}$ où $n \in \mathbb{N}$.
Sachant que $U_n > 2$ pour tout n, calculer la limite de (U_n).

4) Dans la figure ci-dessous, (C) et (C') sont les courbes représentatives, dans un repère orthonormé, d'une fonction f et sa fonction dérivée f ' respectivement.



Calculer l'aire du domaine limité par (C'), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

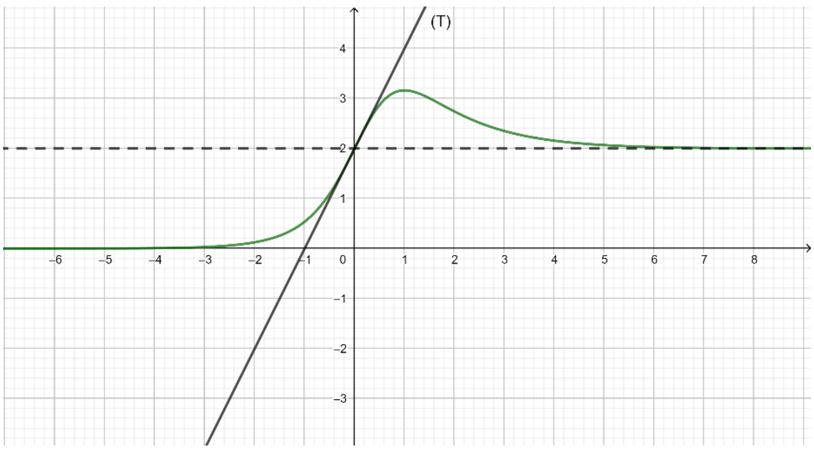
مشروع أسس التصحيح

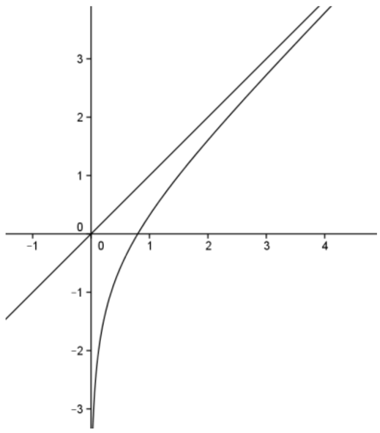
	Question I	6 pts
1	$e^x - e^3 > 0$ $x > 3$ Réponse : a	1,5
2	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2e^{2x}+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x(2e^{2x}+1)} = 0$ Réponse : b	1,5
3	$\left\lvert\frac{\overline{1+ix}}{\overline{x+i}}\right\rvert = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ Réponse : a	1
4	$e^{-2x} - 1 < 0$ $e^{-2x} < 1$, $-2x < 0$, donc $x > 0$ Réponse : a	1
5	$e^{\ln(x+1)} = \ln e^{x^2+x}$, condition $x > -1$ donc $x + 1 = x^2 + x$, $x^2 = 1$, donc $x = -1$ (inacceptable) ou $x = 1$ (acceptable). Réponse : b	1

	Question II	6 pts
A1a	$P(R / A) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}$ $P(R \cap A) = P(R / A) \times P(A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$	1
A1b	$P(R / \overline{A}) = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$ $P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap \overline{A}) = \frac{1}{30} + \frac{5}{6} \times \frac{27}{125} = \frac{16}{75}$	1
A2a	$P(M / A) = P(R / A) = \frac{1}{5}$ $P(M / \overline{A}) = \frac{3^3+2^3}{5^3} = \frac{7}{25}$	1
A2b	$P(M) = P(M \cap A) + P(M \cap \overline{A}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{7}{25} \times \frac{5}{6} = \frac{4}{15}$	1
A3	$P(\overline{A} / M) = \frac{P(\overline{A} \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{4}{15}} = \frac{7}{8}$	1
B	$P(\text{exactement une boule rouge}) = \frac{4}{6} \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{6} \times \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}\right) \times 2 = \frac{4}{15}$	1

	Question III	6 pts
1	Si $z = 1 - \mathrm{i}$, alors $z' = \frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}-\mathrm{i}} = \mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$	0,5
2a	$\overline{z'}(z+\mathrm{i}) = \frac{-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}(z+\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$	0,5
2b	$OM' \cdot AM = \lvert z'\rvert \cdot \lvert z+\mathrm{i}\rvert = \frac{1}{\lvert z+\mathrm{i}\rvert} \cdot \lvert z+\mathrm{i}\rvert = 1$ $(\vec{u};\overrightarrow{AM}) - (\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg(z+\mathrm{i}) - \arg(z')\ \ (2\pi)$ $= \arg(z+\mathrm{i}) - \arg(\mathrm{i}) + \arg(\bar{z} - \mathrm{i})\ \ (2\pi)$ $= \arg(z+\mathrm{i}) - \arg(\mathrm{i}) - \arg(z+\mathrm{i})\ \ (2\pi)$ $= -\arg(\mathrm{i})\ \ (2\pi) = -\frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$	0,5 0,5
2c	$AM = 2$, donc $OM' = \frac{1}{2}$, alors M' se déplace sur le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$.	1
2d	$(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{AM}) = (\vec{u};\overrightarrow{AM}) - (\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$, donc $(AM) \perp (OM')$. Alors, si M' se déplace sur l'axe des ordonnées privé de O, alors M se déplace sur une droite parallèle à l'axe des abscisses, passant par A privée du point A.	1
3a	$x' = \frac{-y-1}{x^2+(y+1)^2}$ and $y' = \frac{x}{x^2+(y+1)^2}$	1
3b	Si $y = -x-1$, alors $x' = \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x}$ et $y' = \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x}$, donc $y' = x'$. Donc, M' se déplace sur la droite d'équation $y = x$ privée du point O.	1

	Question IV	6 pts
A1	$k = \frac{BG}{CD} = \frac{\frac{1}{2}BC}{CD} = \frac{1}{2}$	0,5
A2	1ère Méthode : ADC est un triangle direct rectangle isocèle en D, donc S(ADC) est un triangle direct rectangle isocèle en S(D) = G, c'est le triangle EGB. Aussi S(C) = B, donc S(A) = E. 2ème Méthode : $\frac{EG}{AD} = \frac{1}{2}$ et $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{EG}) = -\frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$ et S(D) = G, donc S(A) = E.	1
A3a	(CF) passe par C, donc S(CF) passe par S(C) = B et elle est perpendiculaire à (CF), donc S(CF) = (BF). (AD) passe par D, donc S(AD) passe par S(D) = G elle est perpendiculaire à (AD), donc S(AD) = (GE).	1
A3b	$(AD) \cap (CF) = \{L\}$ et $(GE) \cap (BF) = \{F\}$ et S(I) = I, donc S(L) = F.	0,5
A3c	Comme S(L) = F, alors $(\overrightarrow{IL};\overrightarrow{IF}) = -\frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$, donc le triangle ILF est rectangle en I.	0,5
A4a	ABCD est un carré direct, donc S(B) est le 4ème sommet du carré direct BGEQ, donc S(B) = Q.	0,5
A4b	$S \circ S$ est une homothétie de rapport $-\frac{1}{4}$ (because $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$) $S \circ S(C) = S(S(C)) = S(B) = Q$, donc I, Q and C sont alignés.	1
B1	B(1) and C(1+i). $z' = \frac{1}{2}e^{\frac{-\pi}{2}\mathrm{i}}z + b$ et S (C) = B, donc $1 = \frac{1}{2}e^{\frac{-\pi}{2}\mathrm{i}}(1+\mathrm{i}) + b$, alors $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ D'où, $z' = \frac{-1}{2}\mathrm{i}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$	0,5
B2	$z_I = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}{1-\frac{-1}{2}\mathrm{i}} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}$.	0,5

	Question V	6 pts
1	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{1-xe^{-x}} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{1-xe^{-x}} = \frac{2}{1-0} = 2$ $y = 0$ et $y = 2$ sont les deux asymptotes à (C).	1
2a	$f'(x) = \frac{2e^{-x}(1-x)}{(1-xe^{-x})^2}$	0,5
2b	Comme $2e^{-x} > 0$ et $(1-xe^{-x})^2 > 0$, alors $f'(x)$ et $(1-x)$ ont le même signe.	0,5
2c	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & 0 & \nearrow & 3,2 & \searrow & 2 \end{array}$	1
3	(T): $y = 2x + 2$	0,5
4		1,25
5a	$f(x) - 2 \neq 0$, donc $f(x) \neq 2$, alors $x \neq 0$	0,75
5b	$h'(x) = \frac{2(f(x)-2)f'(x)}{(f(x)-2)^2} < 0$ pout tout $x \in]-\infty; 0[$. Donc h est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.	0,5

<table>
<tr><th></th><th>Question VI</th><th>6 pts</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
(y’y) est une asymptote verticale à (C).</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x + \ln\frac{x}{x+1}\right] = +\infty + \ln 1 = +\infty + 0 = +\infty$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{x}{x+1} = \ln 1 = 0$
Donc, (d) : $y = x$ est une AO à (C) en $+\infty$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>2c</td><td>$f(x) - x = \ln x - \ln(x+1) < 0$ car $x < x + 1$
donc (C) est en dessous de (d).</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>3a</td><td>$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = 1 + \dfrac{1}{x(x+1)}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>Comme $x > 0$ et $x+1 > 0$, alors $f'(x) > 0$.
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty \nearrow +\infty$</td></tr>
</table></td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>4a</td><td>Sur $]0;+\infty[$, f est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$,
donc l’équation $f(x) = 0$ admet une unique racine α .
$f(0{,}8) < 0$ and $f(0{,}9) > 0$, then $0{,}8 < \alpha < 0{,}9$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4b</td><td>L’équation $f(x) = 2$ admet une unique raine β .
$f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 2$, $0 < 2$ et f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc $\alpha < \beta$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\frac{f(x)}{f(x)-2} > 0$
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>α</td><td>β</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-$</td><td>0 $+$</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x) - 2$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>0 $+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\dfrac{f(x)}{f(x)-2}$</td><td>$+$</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>
Donc, $D =]0;\alpha[\cup]\beta;+\infty[$</td><td>0,5</td></tr>
</table>

	Question VII	6 pts
1	$V_{n+1} - V_n = \int_2^3 [e^{-x}(x-2)^{n+1} - e^{-x}(x-2)^n]dx$ $= \int_2^3 e^{-x}(x-2)^n(x-3)dx \leq 0$ (car $2 \leq x \leq 3$, donc $x - 2 \geq 0$ et $x - 3 \leq 0$). Alors, (V_n) est décroissante.	1,5
2	$\int (x^2 + x + 1)e^{-2x}dx = -\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)e^{-2x} + C$	1,5
3	$U_{n+1} = \frac{3U_n - 4}{U_n - 2}$; $L = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. $L = \frac{3L-4}{L-2}$, donc $L^2 - 5L + 4 = 0$, alors $L = 1$ (inacceptable) ou $L = 4$ (acceptable)	1,5
4	$L'Aire = \int_{\frac{1}{2}}^{1} -f'(x)dx = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) = \left(\frac{1}{2}e - 1\right)\ u^2$	1,5