مسابقة في مادة الرياضيات	الاسم:
المدة: ثلاث ساعات	الرقم:

ملاحظة: - يتكوّن هذا الامتحان من سبع مسائل، يجب اختيار خمس مسائل منها فقط.
- في حال الإجابة عن أكثر من خمس مسائل، عليك شطب الإجابات المتعلّقة بالمسألة التي لم تعد من ضمن اختيارك، لأنّ التصحيح سيقتصر على إجابات المسائل الخمسة الأولى غير المشطوبة.
- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- الدوال والأعداد المركبة (٤ علامات)
في الجدول التالي يوجد إجابة واحدة فقط صحيحة من بين الاجابات المقترحة لكل سؤال. اكتب رقم كل سؤال وبرر إجابتك.

الرقم	السؤال	الإجابات المقترحة		
		a	b	c
1	مجال الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \ln(e^x - e^3)$ هو	$]3\,,+\infty[$	$]-\infty\,,3[\cup]3\,,+\infty[$	$]0\,,3[\cup]3\,,+\infty[$
٢	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^{2x}+x} =$	$+\infty$	0	1
٣	إذا كان x عدد حقيقي غير صفري، فإن $\left\|\dfrac{1+ix}{x+i}\right\| =$	1	$\dfrac{x+1}{x-1}$	$\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
٤	حلول المتباينة $e^{-2x} - 1 < 0$ هي	$]0\,,+\infty[$	$]-\infty\,,+\infty[$	$]-\infty\,,0[$
٥	عدد حلول المعادلة $e^{\ln(x+1)} = \ln(e^{x^2+x})$ هو	٠	١	٢

II- الاحتمال (٤ علامات)
يوجد صندوقان U و V.
- يحتوي الصندوق U على ٤ كرات حمراء اللّون، وكرتين سوداوتين.
- يحتوي الصندوق V على 3 كرات حمراء اللّون، وكرتين سوداوتين.

القسم A
يرمي لاعب مكعب منتظم مكون من ٦ وجوه مرقمة بالأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦.
- إذا كان العدد الظاهر على الوجه العلوي للمكعب ٥، يسحب اللاعب عشوائيًا وفي نفس الوقت ٣ كرات من الصندوق U.
- إن كان غير ذلك، يسحب اللاعب عشوائيًا ٣ كرات واحدة تلو الأخرى مع إرجاع من الصندوق V.

لتكن الأحداث الآتية:
- A: "الرقم الظاهر على الوجه العلوي للمكعب ٥"
- R: "الكرات الثلاث المسحوبة جميعها حمراء".
- M: "الكرات الثلاث المسحوبة لديها اللون نفسه".

١) أ. احسب الاحتمال $P(R / A)$ ثم استنتج أن $P(R \cap A) = \frac{1}{30}$.
ب. بيّن أن $P(R / \overline{A}) = \frac{27}{125}$ واحسب $P(R)$.

٢) أ. احسب $P(M / A)$ و $P(M / \overline{A})$.
ب. استنتج أن $P(M) = \frac{4}{15}$.

٣) الكرات الثلاث المسحوبة لديها اللون نفسه. ما احتمال أن يكون الظاهر على الوجه العلوي للمكعب لا يساوي ٥؟

القسم B
في هذا القسم، نسحب عشوائيًا كرة واحدة من الصندوق U وكرتين واحدة تلو الأخرى دون إرجاع من الصندوق V. ما احتمال سحب كرة واحدة حمراء فقط من بين الكرات الثلاث المسحوبة؟

III- الأعداد المركبة (٤ علامات)

في المستوي الإحداثي المركب العائد للنظام $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

تقع النقاط A، M، M' حيث $z_A=-i$، $z_M=z$ و $z_{M'}=z'$ و $z'=\frac{i}{\bar{z}-i}$ ، $z\neq -i$.

١) اكتب z' في الصورة القطبية في حال كان $z=1-i$.

٢) أ. برهن أن $\overline{z'}(z+i)=-i$.

ب. برهن أن $OM'\times AM=1$ وأن $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM})-(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'})=\frac{-\pi}{2}\,[2\pi]$.

ج. بيّن أن: عندما تتحرك النقطة M على الدائرة ذات المركز A ونصف القطر ٢، فإن النقطة M' تتحرك على دائرة يجب تحديدها.

د. بيّن أن: عندما تتحرك النقطة M' على المحور الصادي باستثاء النقطة O، فإن النقطة M تتحرك على خط يجب تحديده.

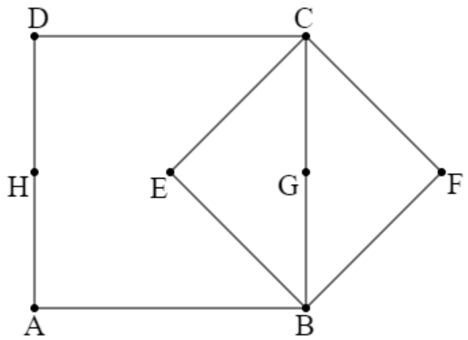
٣) أ. برهن أن $x'=\frac{-y-1}{x^2+(y+1)^2}$ و $y'=\frac{x}{x^2+(y+1)^2}$.

ب. بيّن أن: عندما تتحرك النقطة M على المستقيم $y=-x-1$ باستثناء النقطة A، فإن النقطة M' تتحرك على خط يجب تحديد معادلته.

IV- التحويلات الهندسية (٤ علامات)

في الرسم المقابل:

- ABCD و EBFC مربعان موجهان مركزهما النقطتين E و G على التوالي.
- H نقطة منتصف القطعة المستقيمة [AD].



ليكن S التشابه ذا المركز I الذي يحوّل C إلى B و D إلى G.

$\alpha=-\frac{\pi}{2}$ زاوية التشابه و k نسبته.

القسم A

١) تحقق أن $k=\frac{1}{2}$.

٢) برهن أن $S(A)=E$.

٣) أ. برهن أن صورة المستقيم (CF) بالتشابه S هو المستقيم (BF) وحدد صورة المستقيم (AD) بالتشابه S.

ب. يتقاطع المستقيمان (AD) و (CF) في النقطة L. بيّن أن $S(L)=F$.

ج. استنتج أن المثلث ILF قائم الزاوية.

٤) لتكن Q نقطة منتصف [AB].

أ. برهن أن $S(B)=Q$.

ب. برهن أن النقاط الثلاث تقع على استقامة واحدة.

القسم B

ليكن المستوي العائد للنظام الإحداثي $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

١) بين أن الصورة المركبة للتشابه S هي $z'=-\frac{1}{2}i\,z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

٢) أوجد الصورة الديكارتية للنقطة I، مركز التشابه S.

V- الدوال (٤ علامات)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ على الشكل $f(x) = \frac{2}{1 - xe^{-x}}$ وليكن (C) بيان الدالّة f في المستوي الإحداثي العائد للنظام $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

١) أ- حدّد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. استنتج مقاربين للبيان (C).

٢) أ- برهن أن $f'(x) = \frac{2e^{-x}(1-x)}{(1-xe^{-x})^2}$.

ب. استنتج أن $f'(x)$ و $(1 - x)$ لهما الإشارة نفسها.

ب- ارسم جدول التغير للدالة f.

٣) المعطى هو أن النقطة $W(0, 2)$ هي نقطة انعطاف للبيان (C).

اكتب معادلة المماس (T) على البيان (C) عند النقطة W.

٤) ارسم (T) و (C).

٥) لتكن h الدالة المعرفة على الشكل $h(x) = \ln[(f(x) - 2)^2]$.

أ- حدد مجال الدالة h .

ب- ارسم جدول التغير للدالة h على الفترة $]-\infty, 0[$.

VI- الدوال (٤ علامات)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ على الفترة $]0 ; +\infty[$ على الشكل $f(x) = x + \ln x - \ln(x + 1)$ وليكن (C) بيان الدالّة f في المستوي الإحداثي العائد للنظام $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

ليكن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = x$.

١) أ- حدّد $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$. استنتج مقارب للبيان (C).

٢) أ- برهن أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ب- بين أن المستقيم (d) مقارب للبيان (C) عند $+\infty$.

ج- برهن أن (C) أسفل من (d) لجميع قيم $x \in]0 ; +\infty[$.

٣) أ- بيّن أن $f'(x) = 1 + \frac{1}{x(x+1)}$.

ب- ارسم جدول تغير الدالة f.

٤) أ- برهن أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذر واحد فقط α..

ب- بيّن أن $0.8 < \alpha < 0.9$.

ج. للمعادلة $f(x) = 2$ جذر واحد فقط β. برهن أن $\beta > \alpha$.

٥) ارسم (d) و (C).

٦) لتكن الدالة g المعرفة على الشكل $g(x) = \ln\left(\frac{f(x)}{f(x) - 2}\right)$.

أوجد مجال الدالة g.

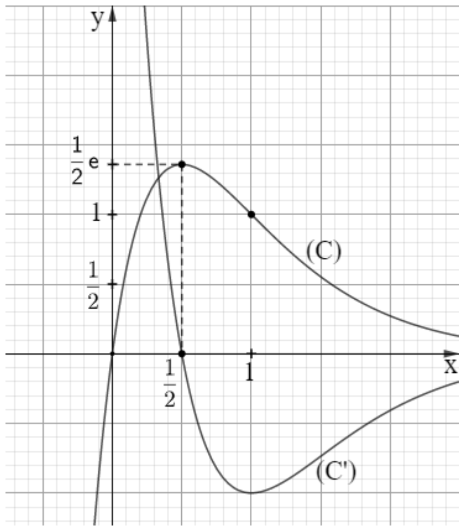
VII- المتتاليات العددية والتكامل (٤ علامات)
في هذه المسألة، الفروع الأربعة مستقلة.

١) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على الشكل $V_n = \int_2^3 e^{-x}(x-2)^n dx$، حيث n عدد صحيح و $n \geq 1$.
برهن أن المتتالية (V_n) متناقصة.

٢) احسب التكامل $\int (x^2 + x + 1)e^{-2x} dx$.

٣) لتكن المتتالية المتقاربة (U_n) المعرفة على الشكل $U_0 = ٣$ و $U_{n+1} = \frac{3U_n - 4}{U_n - 2}$ حيث $n \in \mathbb{N}$.
احسب نهاية (U_n) إذا علمت أن $U_n > ٢$ لجميع قيم n.

٤) يبين الشكل أدناه البيانين (C) و (C’) في النظام للدالة f ولمشتقتها الدالة ′ f على التوالي.



احسب مساحة المنطقة المحددة بيت البيان (C’)، المحور السيني، والمستقيمين $x = \frac{1}{2}$ و $x = ١$.