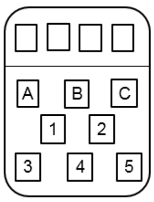
وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانـات الرسمية	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع: العلوم العامة	دورة العام ٢٠٢١ الاستثنائية السبت في ٤ أيلول ٢٠٢١
عدد المسائل: خمس	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ثلاث ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (2 points)

Dans le tableau suivant une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Écrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

№	**Questions**	**Réponses proposées**		
		a	**b**	**c**
1	Soit f la fonction donnée par $$f(x)=\ln\left(\frac{e^x}{e^x-2}\right).$$ Le domaine de définition de f est	$]\ln 2\,;\,+\infty[$	$]0\,;\,+\infty[$	$]-\infty\,;+\infty[$
2	Pour tout réel x, $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$ est égale à	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1+2e^x}$	$\frac{-e^x}{-e^x+2}$
3	L'équation $\ln^2 x+\ln x-6=0$ admet deux solutions x_1 et x_2. Le produit $x_1.x_2$ est égal à	-6	e^{-1}	e^{30}
4	Le clavier d'entrée d'un immeuble est formé de trois lettres A, B et C et de cinq chiffres 1, 2, 3, 4 et 5.  Le code d'entrée est formé d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres distincts. Le nombre de tous les codes possibles est	15	180	375

II- (3 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}\ \ \vec{v})$.

On considère les points A, M et M′ d'affixes $z_A = -i$, $z_M = z$ et $z_{M'} = z'$ tel que

$z' = \dfrac{z+i}{i\bar{z}}$ avec $z \neq 0$.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où $x\ \ y\ \ x'$ et y' sont des nombres réels.

1) Ecrire z' sous la forme exponentielle dans le cas où $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$,
2) Ecrire z sous la forme algébrique dans le cas où $z' = z$.
3) a- Montrer que $OM' = \dfrac{AM}{OM}$.

   b- Montrer que lorsque M varie sur la médiatrice de [OA], le point M′ varie sur un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.
4) Dans cette partie $x > 0$ et $y > 0$.

   a- Montrer que $\dfrac{z'+i}{z} = \dfrac{2y+1}{x^2+y^2}$ et en déduire que (OM) et $(M'A)$ sont parallèles.

   b- Montrer que $z' - z = \dfrac{i + z - i\,z\bar{z}}{i\,\bar{z}}$ et en déduire que si M appartient à (C), alors $MM' = OA$.

III- (3 points)

Une urne U contient des boules rouges et des boules noires numérotées par des entiers naturels distincts.

- 60 % des boules sont rouges, parmi lesquelles 80 % portent des entiers impairs.
- 70 % des boules noires portent des entiers impairs.

Partie A

On tire au hasard une boule de l'urne U. On considère les événements suivants :

R : « la boule tirée est rouge »

I : « la boule tirée porte un nombre impair ».

1) Montrer que la probabilité $P(I \cap R)$ est égale à 0,48 et calculer $P(I \cap \bar{R})$.
2) En déduire que $P(I) = 0{,}76$.
3) Les événements R et I sont-ils indépendants ? Justifier.

Partie B

Dans cette partie on suppose que le nombre des boules dans l'urne U est 50.

1) Montrer que le nombre des boules rouges portant des nombres impairs est 24.
2) Copier et compléter le tableau suivant :

	Rouge	Noire	Total
Impair			38
Pair			
Total	30		50

3) On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne U.

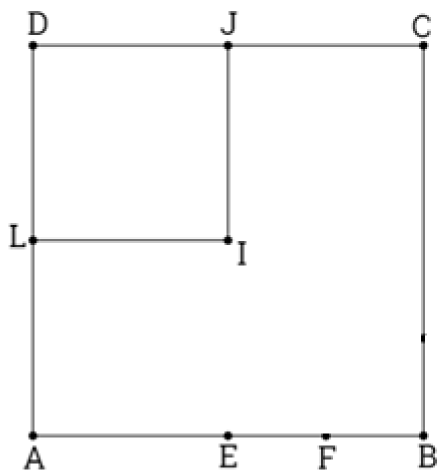
   a- Calculer la probabilité de tirer au moins une boule rouge portant un nombre impair.

   b- Les boules portant des nombres pairs sont numérotées 2, 4, 6, …, 24.
   Sachant que les 3 boules tirées portent des nombres pairs, calculer la probabilité que la somme des entiers portés par ces boules est plus grande que 13.

IV- (4 points)

Dans la figure ci-dessous, on a :

- ABCD est un carré direct de centre I et de côté 8.
- E est le milieu de [AB].
- F est le milieu de [EB].
- J est le milieu de [DC].
- L est le milieu de [DA].



1) Soit S la similitude plane directe qui transforme F en I et transforme B en J.

a- Montrer que $k = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sont respectivement le rapport et un angle de S.

b- Montrer que E est le centre de S.

2) Soit S' la similitude plane directe, de rapport $k' = 2$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, qui transforme I en B.

a- Montrer que $S'(L) = C$.

b- Montrer que l'image de la droite (LD) par S' est la droite (DC).

c- Déterminer l'image de la droite (IC) par S'.

d- Déterminer l'image de A par S'.

3) Soit $h = S \circ S'$.

a- Montrer que h est une homothétie de rapport à déterminer.

b- Vérifier que $h(I) = J$,

c- Soit W le centre de h montrer que W est le centre de gravité du triangle ABJ.

V- (8 points)

On considère les deux fonction f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 1 - \ln x$ et $g(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit (d) la droite d'équation $y = x$.

1) Le tableau suivant est le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

2) a- Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ et en déduire une asymptote à (C).

b- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et en déduire que la droite (d) est une asymptote à (C).

c- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

3) a- Vérifier que $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ et en déduire que $g'(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

b- Dresser le tableau de variations de g.

4) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une racine unique α et que $0\ 6 < \alpha < 0\ 7$.

5) Tracer (d) et (C).

6) Calculer, en fonction de α, l'aire du domaine délimité par (C), (d) et les deux droites d'équations $x = \alpha$ et $x = e$.

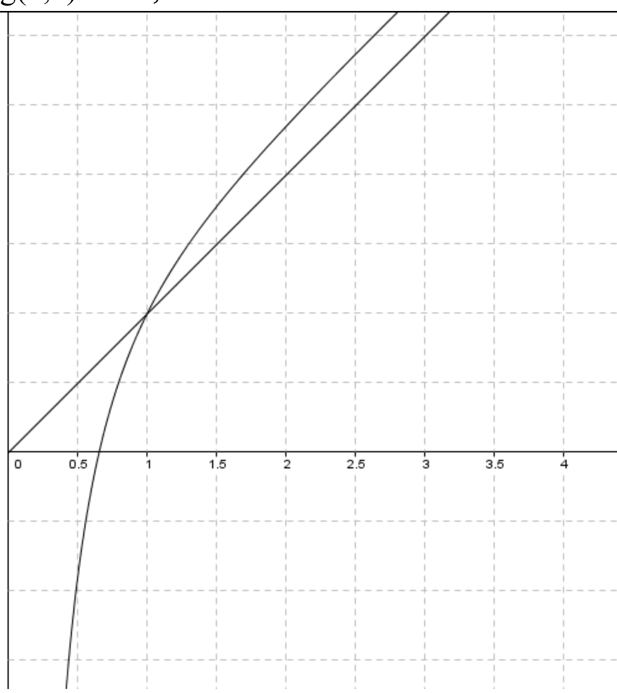
أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

I	Réponses	3pts
1	$e^x - 2 > 0$; $e^x > 2$; $x > \ln 2$; $D_f =]\ln 2 ; +\infty[$ **(a)**	0.75
2	$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{1}{1+2e^x}$ **(b)**	0.75
3	Les racines de l'équation : $\ln^2 x + \ln x - 6 = 0$ sont $x_1 = e^{-3}$ et $x_2 = e^2$. Donc $x_1.x_2 = e^{-1}$ **(b)**	0.75
4	Le nombre de tous les codes est : $3 \times A_5^3 = 180$ **(b)**	0.75

II	Réponses	4.5pts
1	$z' = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$	0.5
2	$z' = z$; $iz\bar{z} = z + i$ $i(x^2 + y^2) = x + iy + i$; $x = 0$ et $x^2 + y^2 = y + 1$; $y^2 - y - 1 = 0$ $z_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}i$ ou $z_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}i$	0.5
3a	$z' = \frac{z+i}{i\bar{z}}$; $\lvert z' \rvert = \frac{\lvert z+i \rvert}{\lvert i\bar{z} \rvert}$; $\lvert z' \rvert = \frac{\lvert z+i \rvert}{\lvert i \rvert \times \lvert \bar{z} \rvert}$; $\lvert z' \rvert = \frac{\lvert z+i \rvert}{\lvert z \rvert}$; $OM' = \frac{AM}{OM}$	0.5
3b	$MO = MA$; $OM' = 1$; M' varie sur le cercle (C) de centre O et de rayon 1	1
4a	$\frac{z'+i}{z} = \frac{\frac{z+i}{i\bar{z}}+i}{z} = \frac{z+i+i^2\bar{z}}{iz\bar{z}} = \frac{2iy+i}{i(x^2+y^2)} = \frac{2y+1}{x^2+y^2}$ $\frac{z'+i}{z} = \frac{2y+1}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$, donc (OM) et (M'A) sont parallèles	1
4b	$z' - z = \frac{z+i}{i\bar{z}} - z = \frac{i + z - i z\bar{z}}{i\,\bar{z}}$ $M \in (C)$ alors $\lvert z \rvert = \lvert \bar{z} \rvert = 1$ $\lvert z' - z \rvert = \left\lvert \frac{i + z - i z\bar{z}}{i\,\bar{z}} \right\rvert = \frac{\lvert i + z - i z\bar{z} \rvert}{\lvert i\,\bar{z} \rvert} = \frac{\lvert i + z - i z\bar{z} \rvert}{\lvert i \rvert \times \lvert \bar{z} \rvert} = \lvert i + z - i \times 1 \rvert = \lvert z \rvert = 1$ Et OA = 1 donc $MM' = OA$.	1

<table>
<tr><th>III</th><th>Réponses</th><th>4.5pts</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>$P(I \cap R) = P(I / R) \times P(R) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$
$P(I \cap \overline{R}) = P(I / \overline{R}) \times P(\overline{R}) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>$P(I) = P(I \cap R) + P(I \cap \overline{R}) = 0,48 + 0,28 = 0,76$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>A3</td><td>Comme $P(I \cap R) = 0,48 \neq P(I) \times P(R) = 0,76 \times 0,6 = 0,456$
alors les événements R et I ne sont pas indépendants.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>Le nombre des boules rouges portant des nombres impairs est $50 \times 0,48 = 24$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>B2</td><td><table>
<tr><th></th><th>Rouge</th><th>Noire</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>Impair</td><td>24</td><td>14</td><td>38</td></tr>
<tr><td>Pair</td><td>6</td><td>6</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>30</td><td>20</td><td>50</td></tr>
</table></td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>B3.a</td><td>P (tirer au moins une boule rouge portant un nombre impair) = $1 - \frac{C_{26}^3}{C_{50}^3} = \frac{85}{98}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>B3.b</td><td><u>2 ; 4 ; 6</u> ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 24
P (que la somme des entiers portés par ces boules est plus grande que 13/pair) =
$1 - \frac{C_3^3}{C_{12}^3} = \frac{219}{220}$ ou $1 - \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1}{C_{12}^3} = \frac{219}{220}$</td><td>1</td></tr>
</table>

IV	Réponses	12pts
1.a	$S(F) = I$ et $S(B) = J$ alors $K = \frac{IJ}{FB} = \frac{4}{2} = 2$. $\alpha = \left(\overrightarrow{FB} ; \overrightarrow{IJ}\right) = \left(\overrightarrow{FB} ; \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.	**1**
1.b	E symétrique de B par rapport à F, alors S(E) symétrique de S(B) = J par rapport à S(F) = I, alors S(E) = E, par suite E centre de S. Ou EF = 2 et EI = 4 donc EI = 2EF et $\left(\overrightarrow{EF} ; \overrightarrow{EI}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et S(F) = I donc S(E) = E.	**1**
2.a	$\frac{BC}{IL} = \frac{4}{2} = 2 = K'$ et $\left(\overrightarrow{IL} ; \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{IL} ; \overrightarrow{IJ}\right) = -\frac{\pi}{2} = \alpha'$ et $S'(I) = B$. Donc $S'(L) = C$	**0.5**
2.b	$S'\big((LD)\big)$ est une droite $\perp$ (LD) et passe par S'(L) = C. Donc $S'\big((LD)\big) = (DC)$,	**0.5**
2.c	$S'\big((IC)\big)$ est une droite $\perp$ (IC) et passe par S'(I) = B. Donc $S'\big((IC)\big) = (BD)$,	**0.5**
2.d	$(IC) \cap (LD) = \{A\}$ donc $\{S'(A)\} = S'((IC)) \cap S'((LD)) = (BD) \cap (DC) = \{D\}$.	**0.5**
3.a	$\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{2} = 0$ et k.k' = 4 donc h = S o S' est une homothétie de rapport 4.	**0.5**
3.b	h(I) = S o S'(I) = S(B) = J.	**0.5**
3.c	h(I) = J et W centre de h ,donc $\overrightarrow{WJ} = 4\,\overrightarrow{WI}$ donc $\overrightarrow{WJ} = 4(\overrightarrow{JI} - \overrightarrow{JW})$; $-3\overrightarrow{WJ} = 4\times(\frac{1}{2}\overrightarrow{EJ})$ donc $\overrightarrow{JW} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JE}$ et E milieu de [AB], donc W est le centre de gravité du triangle JAB.	**1**

III	Réponses	10 pts
1	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{4} \approx 1\ 32 > 0$ d'où $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$	**1**
2.a	$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 + (-\infty) = -\infty$ $x = 0$ est asymptote à (C).	**1**
2.b	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = (+\infty) + 0 = +\infty$ $g(x) - x = \frac{\ln x}{x}$; d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} [\,g(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; donc (d) : $y = x$ est asymptote à (C).	**1**
2.c	$g(x) - x = \frac{\ln x}{x}$ $g(x) - x > 0\,;\ x > 1$; (C) est au dessus de (d) $g(x) - x < 0\,;\ 0 < x < 1$; (C) est en dessous de (d) $g(x) - x = 0\,;\ x = 1$; (C) coupe (d) en (1 ; 1)	**1**
3.a	$g'(x) = 1 + \frac{(\ln x)'.x - 1.\ln x}{x^2} = \frac{x^2+1-\ln x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$; f(x) et g'(x) ont le même signe ; $g'(x) > 0$	**1.5**
3.b	$\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$	**1.5**
4	Sur] 0 ; +∞ [: g est continue, strictement croissante de -∞ à +∞ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α. $g(0{,}6) \approx -\,0{,}25 < 0$ $g(0{,}7) \approx +\,0{,}19 > 0$	**1.5**
5		**2**
6	$A = \int_\alpha^1 [x - g(x)]dx + \int_1^e [g(x) - x]dx = -\frac{\ln^2 x}{2}\Big]_\alpha^1 + \frac{\ln^2 x}{2}\Big]_1^e = \frac{\alpha^4+1}{2}$ unités d'aire	**1.5**