وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانـات الرسمية

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: العلوم العامة

دورة العام ٢٠٢١ العاديّة
الاثنين ٢٦ تموز ٢٠٢١

عدد المسائل: خمس	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ثلاث ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (2 points)

Dans le tableau suivant une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Écrire le numéro de chaque question et donner, en **justifiant**, la réponse qui lui correspond.

№	Questions	Réponses		
		a	**b**	**c**
1	Soit f la fonction donnée par $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$ Le domaine de définition de f est	$[0\,;+\infty[$	$[1\,;3[$	$]-\infty\,;0[\cup]3\,;+\infty[$
2	Pour tout réel x, $\ln(e^x + 2) - x$ est égale à	$\ln\left(\frac{e^x+2}{x}\right)$	$\ln(2)$	$\ln\left(\frac{e^x+2}{e^x}\right)$
3	Soit $I = \int_0^1 \frac{e^x}{3+e^x}dx$ La valeur de I est	$\ln\left(\frac{e+3}{4}\right)$	$\ln\left(\frac{e+3}{3}\right)$	$\ln(e+3)$
4	On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction continue f : $\begin{array}{c\|ccccc} x & 2 & & 4 & & 5 \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 3 & \searrow & -1 & \nearrow & 6 \end{array}$ L'équation f(x) = 4	admet une seule solution	admet deux solutions	n'admet aucune solution

II- (3 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}\ \ \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes $z_A = -2 + 2i$, $z_B = -2i$ et $z_C = 4$.

Pour tout point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z′ tel que $z' = \frac{2z + 4i}{iz + 2 + 2i}$ avec $z \neq -2 + 2i$.

1) Dans le cas où z = 0, donner la forme exponentielle de z′.
2) Ecrire $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle ABC.
3) **a-** Vérifier que $z' = \frac{2(z - z_B)}{i(z - z_A)}$

   b- En déduire que $OM' = \frac{2BM}{AM}$

   c- Montrer que lorsque M varie sur la médiatrice de [AB], le point M′ varie sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

III- (3 points)

Une urne U contient 10 boules : 6 boules bleues et 4 boules rouges.

Partie A

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne U.

On considère les évènements suivants :

A : « les deux boules tirées sont de même couleur »

B : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

1) Vérifier que le nombre de tirages possibles est 45.
2) Montrer que la probabilité $P(A) = \frac{7}{15}$ et en déduire P(B).

Partie B

Dans cette partie, on lance un dé parfait numéroté de 1 à 6.

- Si le nombre obtenu est pair, alors on tire au hasard et simultanément deux boules de U.
- Si le nombre obtenu est impair, alors on tire au hasard et successivement avec remise deux boules de U.

On considère les évènements suivants :

E : « le nombre obtenu est pair »

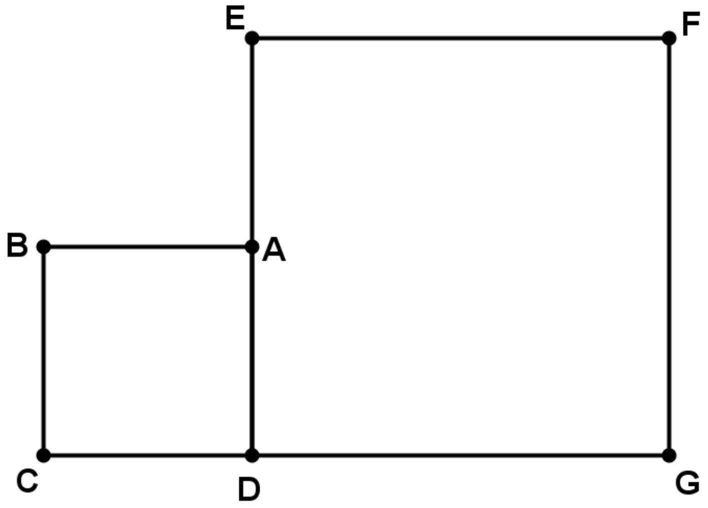
F : « les boules tirées sont de même couleur ».

1) Calculer P(F / E) et vérifier que $P(F \cap E) = \frac{7}{30}$.
2) Vérifier que $P(F \cap \overline{E}) = \frac{13}{50}$ et en déduire P(F).
3) Sachant que les deux boules tirées sont de même couleur, calculer la probabilité que le nombre obtenu soit pair.

IV- (4 points)

Dans la figure suivante,

- ABCD et EDGF sont deux carrés directs.
- CD = 1 et DG = 2.



Soit S la similitude plane directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en D et transforme A en E.

1) Calculer le rapport k de S et montrer que S(C) = G.

2) On note par (T) et (T′) les cercles de diamètres respectifs [BD] et [AE].

(T) et (T′) se coupent en deux points W et A.

Montrer que W est le centre de S.

3) **a-** Montrer que l'image de la droite (BD) par S est la droite (DF).

b- Déterminer l'image de la droite (AD) par S.

c- Montrer que S(D) = F.

4) Soit h la transformation définie par h = S ∘ S.

a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.

b- Déterminer h(B) et en déduire que $\overrightarrow{WF} = -4\overrightarrow{WB}$.

5) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(C; \overrightarrow{CD}\ \overrightarrow{CB})$.

a- Déterminer la forme complexe de h.

b- Calculer l'affixe du point W.

V- (8 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)e^{x} - 1$,

1) Vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$ et déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$,

2) Copier et compléter le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$					

3) Calculer g(0). Vérifier que $g(x) < 0$ pour tout $x < 0$ et que $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(e^{x} - 1)$,

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit (d) la droite d'équation $y = -x$.

1) **a-** Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) est asymptote à (C).

b- Etudier les positions relatives de (C) et (d).

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et calculer f(2).

3) Vérifier que $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I d'abscisse -2.

5) Tracer (d) et (C).

6) L'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions réelles α et β tel que $\alpha < 0 < \beta$.

a- Montrer que $\int xe^{x}dx = (x-1)e^{x} + k$, où $k \in \mathbb{R}$,

b- Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par (C), (d), la droite d'équation $x = \alpha$ et y'y.

Montrer que $A(\alpha) = \left(1 + \alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$ unités d'aire.

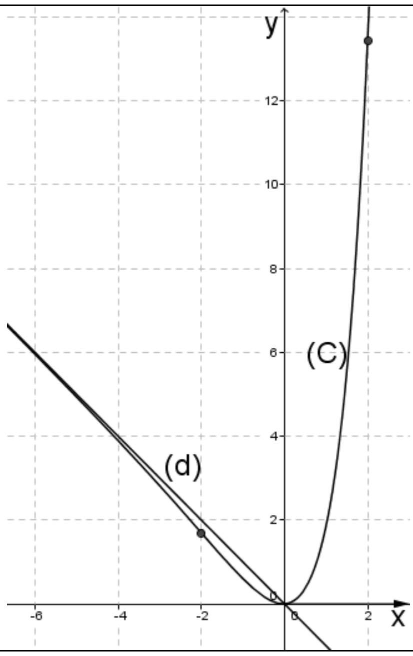
I	Réponses	Note
1	$f(x) = \ln(x^2 - 3x)$. $x^2 - 3x > 0$ donc $x(x - 3) > 0$ donc $x \in]-\infty ; 0[\cup]3 ; +\infty[$. **Donc c**	0,5
2	$\ln(e^x + 2) - x = \ln(e^x + 2) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x+2}{e^x}\right)$. **Donc c**	0,5
3	$\int_0^1 \frac{e^x}{3+e^x}dx = \ln(3 + e^x)\vert_0^1 = \ln(3 + e) - \ln 4 = \ln\left(\frac{e+3}{4}\right)$. **Donc a**	1
4	Sur [2 ; 4] f est continue et strictement décroissante de $3 < 4$ jusqu'à $-1 < 4$ donc l'équation $f(x) = 4$ n'admet aucune solution sur cet intervalle. Sur [4 ; 5] f est continue et strictement croissante de $-1 < 4$ jusqu'à $6 > 4$ donc l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique sur cet intervalle. **Donc a**	1

II	Réponses	Note
1	Pour $z = 0$, $z' = \frac{4i}{2+2i} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	1
2	$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B} = \frac{-2+2i+2i}{4+2i} = i$. Donc $\left\vert\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right\vert = 1$ et $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$. Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.	1
3a	$z' = \frac{2(z+2i)}{i(z+2-2i)} = \frac{2(Z-Z_B)}{i(Z-Z_A)}$	0,5
3b	$\vert z'\vert = \frac{\vert 2\vert\vert Z-Z_B\vert}{\vert i\vert\vert Z-Z_A\vert} = \frac{2BM}{AM}$	1
3c	AM = BM donc OM' = $\vert Z'\vert = 2$, donc M' varie sur le cercle de centre O et de rayon 2.	1

III	Réponses	Note
A1	Le nombre de tirages possibles est $C_{10}^2 = 45$	1
A2	$P(A) = \frac{C_6^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$ $P(B) = 1 - P(A) = \frac{8}{15}$ or $P(B) = \frac{C_6^1 . C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$	1
B1	$P(F / E) = P(A) = \frac{C_6^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$ $P(F \cap E) = P(F / E) \times P(E) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{30}$	1
B2	$P(F \cap \overline{E}) = P(F / \overline{E}) \times P(\overline{E}) = \left(\frac{6\times6}{10\times10} + \frac{4\times4}{10\times10}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{52}{100} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{50}$ $P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \overline{E}) = \frac{7}{30} + \frac{13}{50} = \frac{37}{75}$	1
B3	$P(E / F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{37}{75}} = \frac{35}{74}$	0,5

IV	Réponses	Note
1	S: B→ D, A→ E donc le rapport $k = \frac{DE}{AB} = \frac{2}{1} = 2$. $(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{DG}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, $\frac{DG}{BC} = 2$ et S(B) = D donc S(C) = G.	1
2	Le centre de S appartient à (T) et (T') car $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et S(B) = D et S(A) = E Donc le centre est W ou A. Mais S(A) = E donc A n'est pas invariant par S donc W est le centre.	1
3a	S(BD) est la droite passant par D et perpendiculaire à (BD) donc S(BD) = (DF)	0,5
3b	S(AD) est la droite passant par E et perpendiculaire à (AD) donc S(AD) = (EF)	0,5
3c	{D} = (BD) ∩ (AD) donc {S(D)} = S(BD) ∩ S(AD) = (DF) ∩ (EF) = {F}. Donc S(D) = F.	0,5
4a	h = S o S =Sim(W , 4 , π) = hom(W , –4)	0,5
4b	h(B) = S(S(B)) = S(D) = F h(B) = F, donc $\overrightarrow{WF} = -4\overrightarrow{WB}$	1
5a	C(0 ; 0), D(1 ; 0) , B(0 ; 1) et F(3 ; 2). h: z' = az + b donc z' = –4z + b. h(B) = F donc 3 + 2i = –4(i) + b donc b = 3 + 6i donc z' = –4z + 3 + 6i	0,5
5b	W est un point invariant, donc z = –4z + 3 + 6i donc W $(\frac{3}{5}\,;\,\frac{6}{5})$	0,5

<table>
<tr><th>V</th><th>Réponses</th><th>Note</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [(x+1)e^x - 1] = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x + e^x - 1) = 0 + 0 - 1 = -1$
car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [(x+1)e^x - 1] = +\infty$,</td><td>1</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>$g'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-2</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>g′(x)</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>g (x)</td><td>-1</td><td>↘</td><td>$-1-e^{-2}$</td><td>↗</td><td>0</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>A3</td><td>g(0) = 0.
Sur $]-\infty\,;0[$ $g(x) < 0$ car le maximum de g est plus petit que zéro.
Sur $]0\,;+\infty[$ $g(x) > 0$ car le minimum de g est plus grand que zéro.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>B1a</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [x(e^x - 1)] = -\infty(0-1) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + x] = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
donc (d) est une asymptote à (C) en $-\infty$,</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B1b</td><td>$f(x) + x = xe^x$
Si $x \in]-\infty;0[$ $f(x) + x < 0$, donc (C) est en-dessous de (d)
If $x \in]0;+\infty[$ $f(x) + x > 0$, donc (C) est au-dessus de (d)
If x = 0, f(x) + x = 0, donc (d) et (C) se coupent au point O.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B2</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [x(e^x - 1)] = +\infty(+\infty + 1) = +\infty$
$f(2) = 2(e^2 - 1) = 12{,}77$</td><td>1</td></tr>
</table>

B3	$f'(x) = e^x - 1 + xe^x = (x+1)e^x - 1 = g(x)$, $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$	1,5
B4	$f''(x) = g'(x)$ donc $f''(x)$ s'annule en -2 et change son signe, donc (C) admet un point d'inflexion $I(-2\,;\ 2 - 2e^{-2})$.	0,5
B5		1
B6a	$[(x-1)e^x]' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$, donc $\int xe^x\,dx = (x-1)e^x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$,	1
B6b	Sur $[-2; 0]$ (C) est au-dessous de (d), donc $A(\alpha) = \int_\alpha^0 (-x - f(x))\,dx = \int_\alpha^0 -xe^x\,dx =$ $[(1-x)e^x]_\alpha^0 = 1 - (1-\alpha)e^\alpha$. Mais $f(\alpha) = 1$ donc $\alpha(e^\alpha - 1) = 1$ donc $e^\alpha = \frac{1}{\alpha} + 1$ Alors $A(\alpha) = 1 - (1-\alpha)(\frac{1}{\alpha} + 1) = 1 - \frac{1}{\alpha} - 1 + 1 + \alpha = 1 + \alpha - \frac{1}{\alpha}$ unités d'aire.	1,5