عدد المسائل: أربع مسائل	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعة ونصف	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (6 points)

Le prix d'un kilogramme de riz a été affecté par une crise économique.

Le tableau suivant montre l'évolution du prix d'un kg de riz, en milliers de livres libanaises, entre le mois de Janvier de l'année 2021 et le mois de Juillet de la même année.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
Rang : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Prix d'un kg en milliers LL : y_i	6	10	14	15	18	20	22

Les nombres sont arrondis à 10^{-3} près.

1) Déterminer les coordonnées du point moyen G ($\overline{X}$; $\overline{Y}$).
2) Déterminer le coefficient de corrélation r et interpréter le résultat obtenu.
3) Une équation de la droite de régression ($D_{y/x}$) de y en x est : $y = 2{,}571\,x + m$ où m est un réel.
   Trouver une valeur approchée de m à 10^{-3} près.
4) Dans un repère orthogonal, représenter le nuage des points (x_i ; y_i), placer le point moyen G et tracer la droite de régression ($D_{y/x}$).
5) On suppose que le modèle précédent reste valable jusqu'à la fin de l'année 2021.
   Montrer que le prix d'un kg de riz va dépasser 30 000 LL en 2021.

II- (2 points)

Soit f et g les fonctions données par $f(x) = \ln(x+2)$ et $g(x) = \ln x + \ln 8 - \ln 4$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Pour tout $x > 0$:
   - **a-** Montrer que $g(x) = \ln(2x)$.
   - **b-** Résoudre l'équation f(x) = g(x).

III- (4 points)

Une urne U contient quinze boules : 8 rouges, 5 blanches et 2 noires.

On tire au hasard et simultanément trois boules de cette urne.

1) Vérifier que le nombre total de tirages possibles est 455.
2) Déterminer le nombre de tirages possibles contenant :
   - **a-** trois boules rouges.
   - **b-** trois boules de même couleur.
   - **c-** au moins une boule rouge.

IV- (8 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = xe^{-x+2}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

1) Calculer f(0) et f(1,5).
2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. En déduire une asymptote à (C).
3) **a-** Montrer que $f'(x) = (1-x)e^{-x+2}$.

   b- Copier et compléter le tableau de variations de f suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
f(x)					

4) Tracer (C).

Partie B

Une usine fabrique des crayons. La demande d et l'offre g, en milliers de crayons, sont modélisées par $d(x) = e^{-x+2}$ et $g(x) = e^{x-2}$ où x est le prix unitaire en dizaines de millions LL avec $0 < x \leq 8$.

1) Calculer le nombre des crayons demandés pour un prix unitaire de 30 000 000 LL.
2) **a-** Résoudre l'équation d(x) = g(x).

   b- En déduire, en LL, le prix d'équilibre et le nombre des crayons correspondant.
3) Le revenu, en dizaines de millions LL, est donné par $f(x) = xe^{-x+2}$ avec $0 < x \leq 8$.

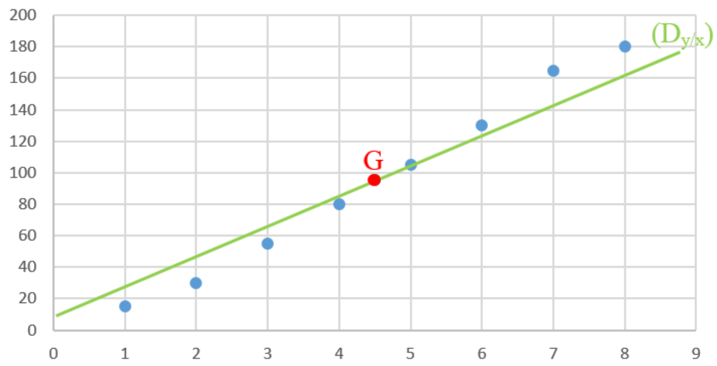
   a- Pour quel prix unitaire le revenu est-il maximal ?

   Montrer, dans ce cas, que le prix p d'un seul crayon est 10 000 LL.

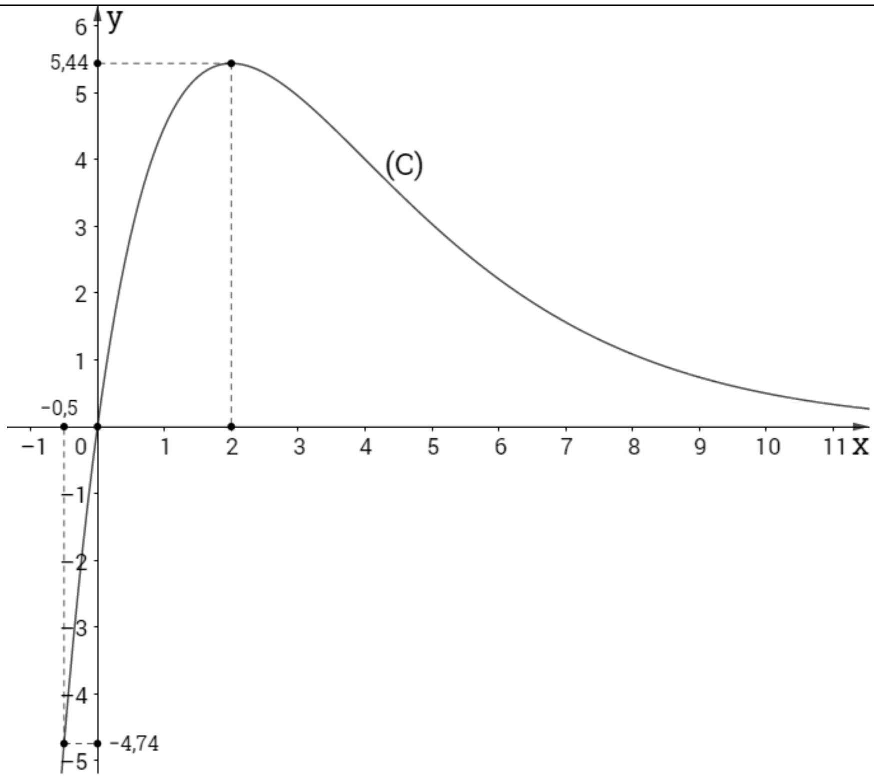
   b- Si p augmente de 5 000 LL, Sami affirme que le revenu sera 35 000 000 LL.

   L'affirmation de Sami est-elle correcte ? Justifier.

Answer Key

	Question I	**Mark**
1)	$\overline{X} = 4.5$; $\overline{Y} = 95$	**0.5**
2)		**1**
3)	$r = 0.997$. The correlation between X and Y is strong positive	**0.5**
4)	$y = 24.76x - 16.43$	**1**
5)a-	Year 2025, then $x = 9$ For $x = 9$, $y = 206.41$. The number of cedars at the end of year 2025 is about 206 cedars	**1**
5)b-	$y \le 250$; $24.76x - 16.43 \le 250$; $x \le 10.76$ The Afforestation Department in the country will stop planting cedars for the first time during the 10^{th} period.	**1**

Questions		Réponses	Notes
III (10pts)	A1	$f(-0.5) = -4.74$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	1
	A2	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)(0)$ F.I. ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{0.5x-2}} = \frac{+\infty}{+\infty}$ F.I. ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = RH = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{0,5x-2}} = 0$ donc $y = 0$ (x'x) A.H.	1
	A3a	$f'(x) = 0,5(2-x)e^{-0.5x+2}$.	1
	A3b	$f'(x) < 0$ donc $0,5(2-x)e^{-0,5x+2} < 0$ donc $2 - x < 0$ car $0,5e^{-0,5x+2} > 0$ donc $x > 2$.	0.5
	A3c	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & 5.44 & \searrow & 0 \end{array}$	1
	A4		1,5

			
	B1	d(2) = 2,72 millier des articles = 2 720 articles.	1
	B2	d(p) = g(p), $e^{-0,5p+2} = e^{0,5x-2}$ donc p = 4 alors le prix d'équilibre est 2 000 LL. d(4) = 1 alors la quantité d'équilibre est 1 000 articles. Pour le prix de 4 000 LL, la demande = l'offre = 1 000 articles alors le marché est en équilibre.	1,5
	B3a	Revenu = pd(p) = p.$e^{-0,5p+2}$ = f(p)	0,5
	B3b	Le revenu est maximum quand f est maximum donc pour x = 2, c-à-d 2 000 LL. f(2) = 5,44 c-à-d 5 440 articles.	1

Corrigé

1) Condition : $\begin{cases} 2x-1 \succ 0 \\ -x+2 \succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \succ \dfrac{1}{2} \\ x \prec 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{1}{2};2\right[$.

$\ln(2x-1) = \ln(-x+2)$

$2x-1 = -x+2$

$3x = 3$

$x = 1$, valeur acceptable.

Donc $S = \{1\}$.

2) Condition : $\begin{cases} x \succ 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \succ 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Donc $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

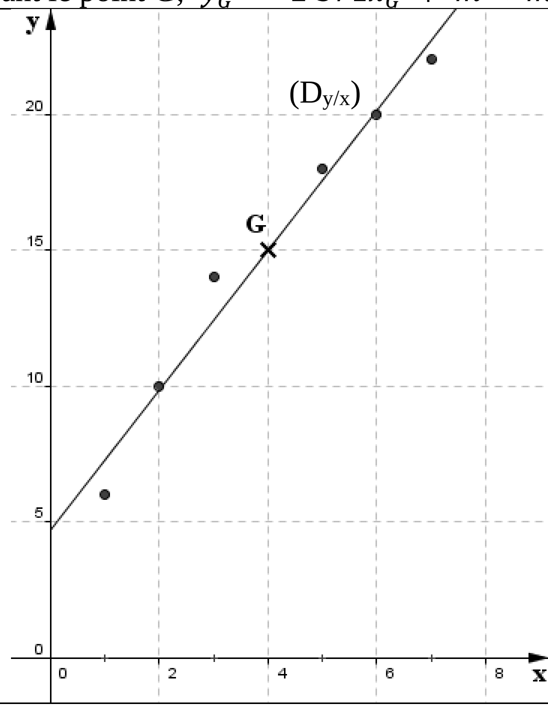
3) a) 2B et 1R : $C_5^2 \times C_9^1 = 90.$

b) 3R ou 3B : $C_9^3 + C_5^3 = 94.$

c) 1R 1B 1N : $C_9^1 \times C_5^1 \times C_1^1 = 45.$

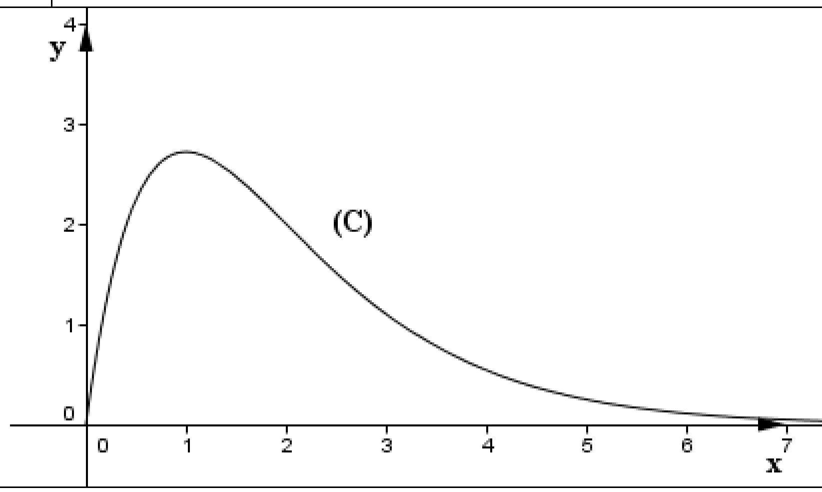
d) $C_{15}^3 - C_6^3 = 435$ ou $C_9^1 \times C_6^2 + C_9^2 \times C_6^1 + C_9^3 = 435.$

وزارة التربية والتعليم العالي المديريّة العامّة للتربية دائرة الامتحانات الرسميّة	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع: الاجتماع والاقتصاد	دورة العام ٢٠٢١ العادية السبت في ٣١ تموز ٢٠٢١
عدد المسائل: أربع مسائل	أسس تصحيح مسابقة الرياضيات	

QI	Eléments de réponse	Note
1	D'après la calculatrice,G(4 ; 15)	1
2	D'après la calculatrice $r = 0\ 987$ Interprétation : forte corrélation positive entre x et y	1 ½
3	D'après la calculatrice $m = A = 4\ 714$ Autre méthode : en utilisant le point G, $y_G = 2\ 571x_G + m \Rightarrow m = 4\ 716$	1
4		3
5	$y > \frac{30\ 000}{1\ 000}$ donc $y > 30$ donc $x > 9\ 83$ En octobre 2021 le prix d'un kg de riz va dépasser 30 000	1

QII	Eléments de réponse	Note
1	$x + 2 > 0; x > -2; D_f =]-2; +\infty[$	1
2a	$g(x) = \ln x + \ln 8 - \ln 4 = \ln\left(\frac{8x}{4}\right) = \ln(2x)$	½
2b	$\ln(x + 2) = \ln(2x)$ $x + 2 = 2x$ $x = 2 > 0$	1

QIII	Eléments de réponse	Note
1	$C_{15}^{3} = 455$	1
2a	$C_{8}^{3} = 56$	1 ½
2b	$C_{8}^{3} + C_{5}^{3} = 56 + 10 = 66$	1 ½
2c	$C_{15}^{3} - C_{7}^{3} = 455 - 35 = 420$ Ou, $C_{8}^{1} \times C_{7}^{2} + C_{8}^{2} \times C_{7}^{1} + C_{8}^{3} = 420$	1

QIV	Eléments de réponse	Note
A1	$f(0) = 0; f(1\ 5) = 2\ 473$	**1**
A2	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x-2}}\right) = R.H = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{x-2}}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$ Ou $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}e^{2} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ $y = 0$ est une asymptote à(C).	**1**
A3a	$f'(x) = e^{-x+2} - xe^{-x+2} = (1-x)e^{-x+2}$	**1**
A3b	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & & & 2{,}718 & & \\ & & \nearrow & & \searrow & \\ & 0 & & & & 0 \end{array}$	**1**
A4		**1**
B1	$x = \frac{30\ 000\ 000}{10\ 000\ 000} = 3; d(3) = e^{-1} = 0\ 3678$ Le nombre de crayons demandés pour un prix unitaire de 30 000 000 est estimé à 368	**1**
B2a	$d(x) = g(x)$ $e^{-x+2} = e^{x-2}$ $-x + 2 = x - 2$ $2x = 4; x = 2$	**1**
B2b	Le prix d'équilibre en dizaines de millions LL est 2 ou c'est 20 000 000 L.L $d(2) = 1$ Le nombre de crayons correspondant est : 1 000 crayons	**1**
B3a	D'après le tableau de variations de f, f est maximale pour $x = 1$ Le revenu est maximal pour un prix unitaire d'une dizaine de millions L.L ou de 10 000 000 L, L Le prix d'un crayon $p = \frac{10\ 000\ 000}{1\ 000} = 10\ 000$ L, L	**1**
B3b	$f(1) = 2\ 718$, le revenu maximal est 27 180 000L, L $<$ 35 000 000 L.L Deuxième méthode: 10 000 + 5 000 = 15 000 $\rightarrow \frac{1\ 000\times 15\ 000}{10\ 000\ 000} = 1{,}5$ $f(1{,}5) = 2{,}473 < \frac{35\ 000\ 000}{10\ 000\ 000}$ Sami n'a pas raison.	**1**