ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

مسابقة في مادة الرياضيات

المدة: ساعتان

(باللغة الفرنسيّة)

الاسم: ....

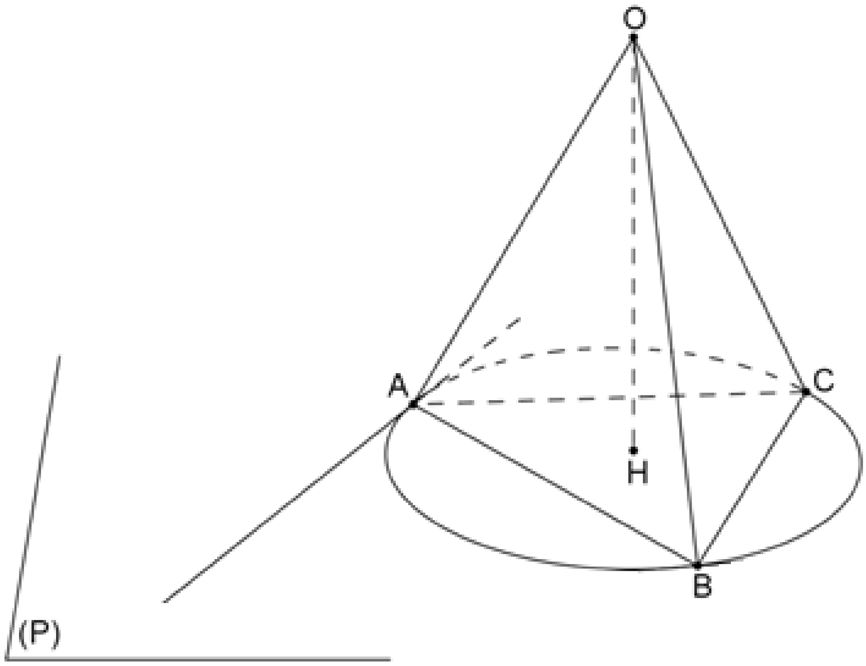
الرقم: ....

I- (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points **A**(6 ; 0 ; 0) , **B**(0 ; 6 ; 0) et **C**(0 ; 0 ; 6).

Soit **(Ω)** le cercle circonscrit au triangle **ABC**.



1) **Montrer que** le triangle **ABC** est équilatéral.

2) **Ecrire** une équation cartésienne du plan **(P)** déterminé par les points **A, B et C**.

3) **a- Montrer que** le point **H**(2 ; 2 ; 2) est le projeté orthogonal du point **O** sur **(P).**

   b- Vérifier que H est le centre de **(Ω)**.

   c- Montrer que le volume du tétraèdre **OABC** est le triple du volume du tétraèdre **OAHB**.

4) Soit **(D)** la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 6 \\ y = -m \\ z = m \end{cases}$ où $m \in \mathbb{R}$.

   Montrer que (D) est tangente à **(Ω)** en **A**.

II- (4 points)

Une enquête menée auprès d'un groupe de patients a montré qu'ils ont une maladie cardiaque seulement, ou une maladie pulmonaire seulement, ou les deux maladies à la fois. On sait que :

- **60 %** des patients sont des hommes.
- Parmi les hommes: **20 %** ont une maladie cardiaque seulement et **50%** ont une maladie pulmonaire seulement.
- Parmi les femmes: **25%** ont une maladie cardiaque seulement et **40%** ont à la fois les deux maladies.

Partie A

Un patient est choisi au hasard et on considère les évènements suivants:

- **H** : « le patient choisi est un homme »
- **C** : « le patient choisi a une maladie cardiaque seulement »
- **U** : « le patient choisi a une maladie pulmonaire seulement »
- **E** : « le patient choisi a les deux maladies à la fois ».

1) **Calculer** les probabilités :
   - $P(H \cap C)$
   - $P(H \cap U)$
   - $P(H \cap E)$.
2) **Calculer** :
   - $P(C)$
   - $P(U)$.

   Vérifier que $P(E) = \dfrac{17}{50}$.
3) **Montrer que** $P(C \cup U) = \dfrac{33}{50}$.
4) Sachant que le patient choisi a une seul maladie, **calculer** la probabilité que ce patient a une maladie cardiaque.

Partie B

Le groupe est formé de **500** patients.
Les noms de trois patients sont choisis au hasard et simultanément pour que chacun d'eux obtienne un contrat d'assurance gratuit.
Sachant que les trois patients choisis ont les deux maladies à la fois, **calculer** la probabilité qu'ils soient des hommes.

III- (4 points)

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère les points **A** et **B** d'affixes **1** et **–2** respectivement.

M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z' tel que $z' = \dfrac{\overline{z}+2}{\overline{z}}$ avec $z \neq 0$.

1) Dans cette question, on pose $z' = 1+i$. **Ecrire** z sous <u>forme exponentielle</u>.

2) a- Montrer que :

- $\left|\overline{z}+2\right| = BM$
- $OM' = \dfrac{BM}{OM}$.

b- Si $\left|z'\right| = 1$, **montrer que** M appartient <u>à une droite</u> à **déterminer**.

3) a- Pour tout $z \neq 0$, **montrer que** $\overline{z}(z'-1) = 2$.

b- Pour tout $z \neq 0$, **vérifier que** $\arg\left(z'-1\right) = \arg\left(z\right) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

c- Dans cette partie, on pose $z' = 1 + e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\pi;\pi\right]$.

Montrer que $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{AM'}$.

IV- (8 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = -2x$.

On pose y = **z** + 2x + 2.

1) **Former** une <u>équation différentielle</u> **(E')** satisfaite par **z**.

2) **Résoudre (E')** .

   En déduire la <u>solution particulière</u> de **(E)** vérifiant **y(0) = 0**.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x + 2 - 2e^{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de **f** dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit (Δ) la droite d'équation $y = 2x + 2$.

1) **a- Déterminer** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b- Montrer que, pour tout x, (C) est en-dessous de (Δ).

   c- Montrer que (Δ) est asymptote à (C).

2) **Déterminer** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   Calculer $f(1)$ et $f(1{,}5)$.

3) **Calculer** $f'(x)$.

   Dresser le tableau de variations de **f**.

4) **Tracer** (Δ) et (C).

5) **a- Montrer que f** admet sur $]0\,;+\infty[$ une <u>fonction réciproque</u> **g**.

   Déterminer le <u>domaine de définition</u> de **g**.

   b- Soit **(G)** la courbe représentative de **g.**

   Soit **(T)** la tangente à **(C)** au point **L** d'abscisse $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

   Montrer que (T) est <u>tangente</u> à **(G)** au point **L'** d'abscisse $2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - 1$.