وزارة التربية والتعليم العالي
المديريّة العامّة للتربية
دائرة الامتحانات الرسميّة

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع علوم الحياة

دورة العام ٢٠١٩ الاستثنائيّة
الاثنين ٢٩ تموز ٢٠١٩

عدد المسائل: اربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

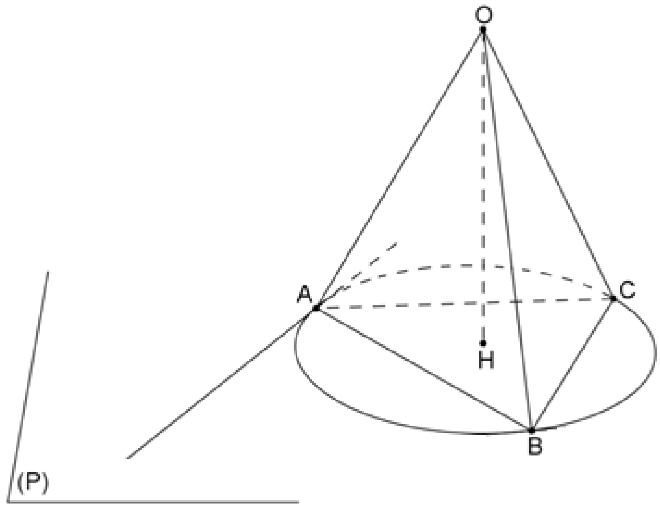
ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points A(6 ; 0 ; 0) , B(0 ; 6 ; 0) et C(0 ; 0 ; 6). Soit (Ω) le cercle circonscrit au triangle ABC.

1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
2) Ecrire une équation cartésienne du plan (P) déterminé par les points A, B et C.
3) a- Montrer que le point H(2 ; 2 ; 2) est le projeté orthogonal du point O sur (P).
   b- Vérifier que H est le centre de (Ω).
   c- Montrer que le volume du tétraèdre OABC est le triple du volume du tétraèdre OAHB.
4) Soit (D) la droite d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = 6 \\ y = -m \quad \text{où} \quad m \in \mathbb{R} \\ z = m \end{cases}.$$
   Montrer que (D) est tangente à (Ω) en A.



II- (4 points)

Une enquête menée auprès d'un groupe de patients a montré qu'ils ont une maladie cardiaque seulement, ou une maladie pulmonaire seulement, ou les deux maladies à la fois. On sait que :

- 60 % des patients sont des hommes.
- Parmi les hommes: 20 % ont une maladie cardiaque seulement et 50% ont une maladie pulmonaire seulement.
- Parmi les femmes: 25% ont une maladie cardiaque seulement et 40% ont à la fois les deux maladies.

Partie A

Un patient est choisi au hasard. On considère les évènements suivants:

- H : « le patient choisi est un homme »
- C : « le patient choisi a une maladie cardiaque seulement »
- U : « le patient choisi a une maladie pulmonaire seulement »
- E : « le patient choisi a les deux maladies à la fois».

1) Calculer les probabilités $P(H \cap E)$ et $P(H \cap \overline{E})$.
2) Calculer $P(C)$, $P(U)$ et vérifier que $P(E) = \frac{17}{50}$.
3) Montrer que $P(C \cup U) = \frac{33}{50}$.
4) Sachant que le patient choisi a une seule maladie, calculer la probabilité que ce patient a une maladie cardiaque.

Partie B

Le groupe est formé de 500 patients. Les noms de trois patients sont choisis au hasard et simultanément pour que chacun d'eux obtient un contrat d'assurance gratuit.
Sachant que chacun des trois patients choisis a les deux maladies à la fois, calculer la probabilité qu'ils soient des hommes.

III- (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère les points A et B d'affixes 1 et -2 respectivement.

M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z' tel que $z' = \dfrac{\overline{z}+2}{\overline{z}}$ avec $z \neq 0$.

1) Ecrire z sous forme exponentielle dans le cas où $z' = 1+i$.
2) a- Montrer que $OM' = \dfrac{BM}{OM}$.

   b- Si $|z'| = 1$, montrer que M appartient à une droite à déterminer.
3) a- Pour tout $z \neq 0$, montrer que $\overline{z}(z'-1) = 2$.

   b- Pour tout $z \neq 0$, vérifier que $\arg(z'-1) = \arg(z) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

   c- Dans cette partie, on pose $z' = 1 + e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\pi\ ;\ \pi\right]$.

   Montrer que $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{AM'}$.

IV- (8 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E): y' - y = -2x$. On pose $y = z + 2x + 2$.

1) Former une équation différentielle (E') satisfaite par z.
2) Résoudre (E') et en déduire la solution particulière de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty\ ;\ +\infty\right[$ par $f(x) = 2x + 2 - 2e^{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit (Δ) la droite d'équation $y = 2x + 2$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b- Montrer que, pour tout x, (C) est en-dessous de (Δ).

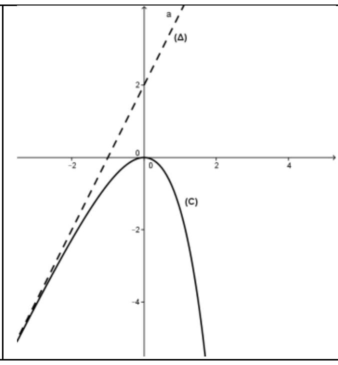
   c- Montrer que (Δ) est asymptote à (C).
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Calculer $f(1)$ et $f(1,5)$.
3) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4) Tracer (Δ) et (C).
5) a- Montrer que f admet sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$ une fonction réciproque g dont on déterminera le domaine de définition.

   b- Soit (G) la courbe représentative de g et soit (T) la tangente à (C) au point L d'abscisse $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

   Montrer que (T) est tangente à (G) au point L' d'abscisse $2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - 1$.

أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

Q.I	Answer key	4 pts
1	AB = AC = BC = $6\sqrt{2}$ donc ABC est un triangle équilatéral	½
2	$\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$ alors une équation cartésienne de (P) est x + y + z – 6 = 0	½
3.a	$H\epsilon(P)$ et $\overrightarrow{OH}=2\overrightarrow{N_P}\ donc\ (OH)\perp(P)$ alors H projeté orthogonal de O sur (P).	1
3.b	OA = OB = OC = 6 et H projeté orthogonal de O sur (P) donc HA = HB = HC donc H centre du cercle **ou** HA = HB = HC = $2\sqrt{6}$	½
3.c	$V_{OABC}=\frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right)\right\|=36$ unité de volumes $V_{OAHB}=\frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\right\|=12$ unité de volumes **ou** $V_{OABC}=\dfrac{1}{3}OH\times A_{ABC}\ \ et\ \ V_{OAHB}=\dfrac{1}{3}OH\times A_{AHB}\ \ alors\ \ \dfrac{V_{OABC}}{V_{OAHB}}=\dfrac{A_{ABC}}{A_{AHB}}=3$	½
4	$A\in(D)$; $\vec{V}_{(D)}.\overrightarrow{HA}=0$ et $(D)\subset(P)$ d'où (D) tangente en A à (P)	1
Q.II	**Answer key**	**4 pts**
A1	$P(H\cap E)=P(H)\times P(E/H)=0,6\times(1-0,2-0,5)=0,18$ $P(H\cap\overline{E})=P(H)-P(H\cap E)=0,6-0,18=0,42$	½
A2	$P(C)=P(H\cap C)+P(\overline{H}\cap C)=0,12+0,4\times0,25=0,22$ $P(U)=P(H\cap U)+P(\overline{H}\cap U)=0,3+0,4\times0,35=0,44$ $P(E)=1-P(C)-P(U)=0,34$ OU $P(E)=P(H\cap E)+P(\overline{H}\cap E)=0,34$	1
A3	$P(C\cup U)=P(C)+P(U)-P(C\cap U)=0,22+0,44-0=0,66=\dfrac{33}{50}$ Car $C\cap U=\varnothing$	½
A4	$P(C/C\cup U)=\dfrac{P\left(C\cap(C\cup U)\right)}{P(C\cup U)}=\dfrac{P(C)}{P(C\cup U)}=\dfrac{0,22}{0,66}=\dfrac{1}{3}$ ou $P(C/\overline{E})=\dfrac{P\left(C\cap\overline{E}\right)}{P(\overline{E})}=\dfrac{1}{3}$	1
B	$0,18\times500=90$ $(H\cap E)$ $0,34\times500=170$ (E) $P=\dfrac{\frac{C_{90}^{3}}{C_{500}^{3}}}{\frac{C_{170}^{3}}{C_{500}^{3}}}=\dfrac{C_{90}^{3}}{C_{170}^{3}}=\dfrac{2937}{20111}=0,146$ OU $P=\dfrac{C_{90}^{3}}{C_{170}^{3}}=0,146$	1
Q.III	**Answer key**	**4 pts**
1	$z'=1+i$; $(1+i)\overline{z}=\overline{z}+2$; $i\overline{z}=2$; $\overline{z}=-2i$; $z=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$	½
2a	$OM'=\|z'\|=\left\|\dfrac{\overline{z}+2}{\overline{z}}\right\|=\dfrac{\|\overline{z}+2\|}{\|\overline{z}\|}=\dfrac{\|\overline{z+2}\|}{\|Z\|}=\dfrac{\|z+2\|}{\|Z\|}=\dfrac{BM}{OM}$	½
2b	$\|z'\|=1$; $OM'=1$; $MB=MO$ alors M se trouve sur la médiatrice de [OB]. Ou $MB=MO$ alors x = - 1 lorsque M(x ;y)	1

3a	$z'-1=\frac{\bar z+2}{\bar z}-1=\frac{2}{\bar z}$; donc $\bar z\left(z'-1\right)=2$	½
3b	$\arg(z'-1)=\arg\left(\frac{2}{\bar z}\right)=-\arg(\bar z)=\arg(z)+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$	½
3c	$z'-1=e^{i\theta}$; $\bar z=\frac{2}{z'-1}=2e^{-i\theta}$; $z=2e^{i\theta}=2\left(z'-1\right)$ alors $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AM'}$ OU $\lvert Z'-1\rvert=1$; $\lvert Z\rvert=\lvert\bar Z\rvert=\frac{2}{1}=2$;$OM=2AM'$ et $\left(\vec u;\overrightarrow{AM'}\right)=\left(\vec u;\overrightarrow{OM}\right)+2k\pi$; $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{AM'}\right)=2k\pi$ alors $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AM'}$	**1**
Q.IV	**Answer key**	**8 pts**
A1	$y'=z'+2$ alors $z'+2-z-2x-2=-2x$ $(E'): z'-z=0$	½
A2	la solution générale de (E') est $z=Ce^{x}$ Donc la solution générale de (E) est $y=Ce^{x}+2x+2$ $y(0)=0$; $C=-2$ Donc la solution particulière de (E) est $y=-2e^{x}+2x+2$	**1**
B1a	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	½
B1b	$f(x)-y_{(\Delta)}=-2e^{x}<0$ alors (C) est en-dessous de (Δ)	½
B1c	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y_{(\Delta)}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-2e^{x}=0$ alors (Δ) est asymptote à (C)	**1**
B2	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2+\frac{2}{x}-2\frac{e^{x}}{x}\right)=+\infty\left(2+0-\infty\right)=-\infty$ $f(1)=4-2e\approx-1{,}4$ $f(1{,}5)=5-2e^{1,5}\approx-3{,}9$	**1**
B3	$f'(x)=2-2e^{x}$; $f'(x)\geq 0$; $x\leq 0$. Pour $x=0$; $f'(0)=0$ et $f(0)=0$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & 0 & \searrow & -\infty \end{array}$ **B4** 	**B3** **1** **B4** **1**
B5a	Sur $]0;+\infty[$, f est définie , continue et strictement décroissante de 0 à $-\infty$ donc f admet une fonction réciproque g et $D_g=f\left(]0;+\infty[\right)=]-\infty;0[$	½
B5b	$f'\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)=-1$; $f\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)=2\ln\left(\frac{3}{2}\right)-1$ $g\left(2\ln\left(\frac{3}{2}\right)-1\right)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$; $L\left(2\ln\left(\frac{3}{2}\right)-1;\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ $g'\left(2\ln\left(\frac{3}{2}\right)-1\right)=\frac{1}{f'\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)}=-1$; $(T): y=-x+3\ln\left(\frac{3}{2}\right)-1$	**1**