وزارة التربية والتعليم العالي
المديريّة العامة للتربية
دائرة الامتحانات الرسمية

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع العلوم العامة

دورة العام ٢٠١٩ الاستثنائيّة
الخميس ١ آب ٢٠١٩

عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (2 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

A et B sont deux points d'affixes respectives $z_A = -4$ et $z_B = 2$.

M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z' tel que $z' = \dfrac{\bar{z}+4}{\bar{z}-2}$, où $z \neq -4$ et $z \neq 2$.

1) Déterminer les coordonnées des points M dans le cas où M et M' sont confondus.
2) a- Exprimer $|z'|$ en fonction de MA et MB et vérifier que $\arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-2}{z+4}\right) + 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

   b- Montrer que si M' se déplace sur le cercle (C) de centre O et de rayon 1, alors M se déplace sur une droite (Δ) à déterminer.

   c- Déterminer l'ensemble des points M si z' est un réel strictement négatif.

   d- On donne le nombre complexe $u = e^{-i\frac{\pi}{9}}$.
   Déterminer la nature du triangle MBA lorsque u est une racine cubique de z'.

II- (2,5 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2.

- U_1 contient une boule blanche et trois boules noires
- U_2 contient une boule rouge, trois boules blanches et deux boules noires.

On choisit au hasard une de ces deux urnes :

- Si l'urne U_1 est choisie, on tire au hasard, successivement et avec remise deux boules de l'urne U_1
- Si l'urne U_2 est choisie, on tire au hasard, successivement et sans remise trois boules de l'urne U_2.

On considère les évènements suivants :

T : « L'urne U_1 est choisie »
E : « Exactement deux boules blanches sont tirées ».

1) a- Calculer les probabilités $P(E/T)$ et $P(E \cap T)$.

   b- Montrer que $P\left(E \cap \bar{T}\right) = \dfrac{9}{40}$.

   c- En déduire P(E).
2) Sachant qu'exactement deux boules blanches sont tirées, calculer la probabilité qu'elles soient de U_2.
3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

   a- Vérifier que $P(X=1) = \dfrac{33}{80}$.

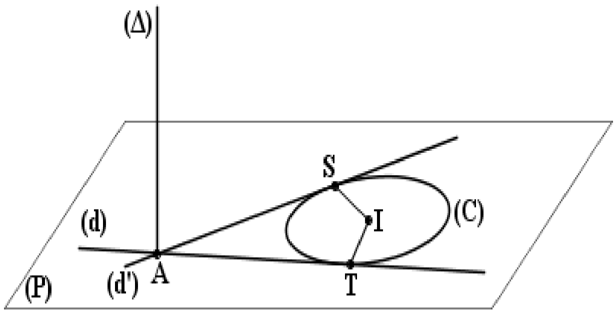
   b- Déterminer $P(X \geq 1)$.

III- (2,5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\ \vec{i}\,,\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les droites (d) et (d') d'équations paramétriques

(d) : $\begin{cases} x = m+1 \\ y = 2m+1 \\ z = 2m+1 \end{cases}$ et (d') : $\begin{cases} x = -t \\ y = 2t+3 \\ z = -2t-1 \end{cases}$ où m, t ∈ ℝ.



1) Montrer que (d) et (d') se coupent au point A(1 ; 1 ; 1).
2) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) déterminé par (d) et (d').
3) Soit (C) le cercle, de rayon $3\sqrt{5}$, tangent à (d) en T et tangent à (d') en S.

   Soit (Δ) la droite passant par A et perpendiculaire au plan (P).

   a- Montrer que le point I(1 ; 10 ; 1) est le centre de (C).

   b- Calculer les coordonnées des deux points E et F de (C) équidistants de (d) et (d').

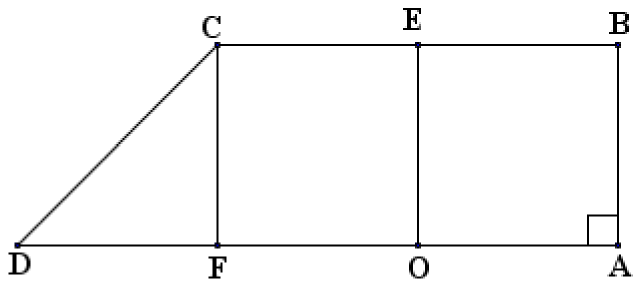
   c- Montrer que l'aire du quadrilatère ATIS est $18\sqrt{5}$.

   d- Déterminer les coordonnées des points B de (Δ) tel que le volume du solide BATIS est 30.

IV- (3 points)

Dans la figure ci-contre :

- ABEO et OECF sont deux carrés directs de côté 1
- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- D est le symétrique de O par rapport à F.



Soit S la similitude plane directe qui transforme A en C et B en D.

1) a- Montrer que le rapport de S est égal à $\sqrt{2}$ et que $\dfrac{3\pi}{4}$ est un angle de S.

   b- Montrer que O est le centre de la similitude S.

   c- Déterminer S(E).

2) Soit S^n la transformation définie par $S^n = \underbrace{S \circ S \circ S \circ ... \circ S}_{n \text{ fois}}$ où n est un entier naturel; (n ≥ 2).

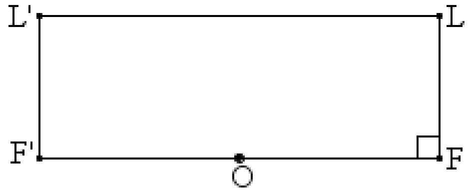
   a- Déterminer la valeur de n lorsque l'image du carré OABE par S^n est un carré d'aire 16 et en déduire que, dans ce cas, S^n est une homothétie négative.

   b- Déterminer le plus petit entier naturel n pour que S^n soit une homothétie positive.

V- (3 points)

Dans la figure ci-contre :

- F'FLL' est un rectangle
  tel que F'F = 4 et FL= $\sqrt{2}$
- O est le milieu de [FF'].

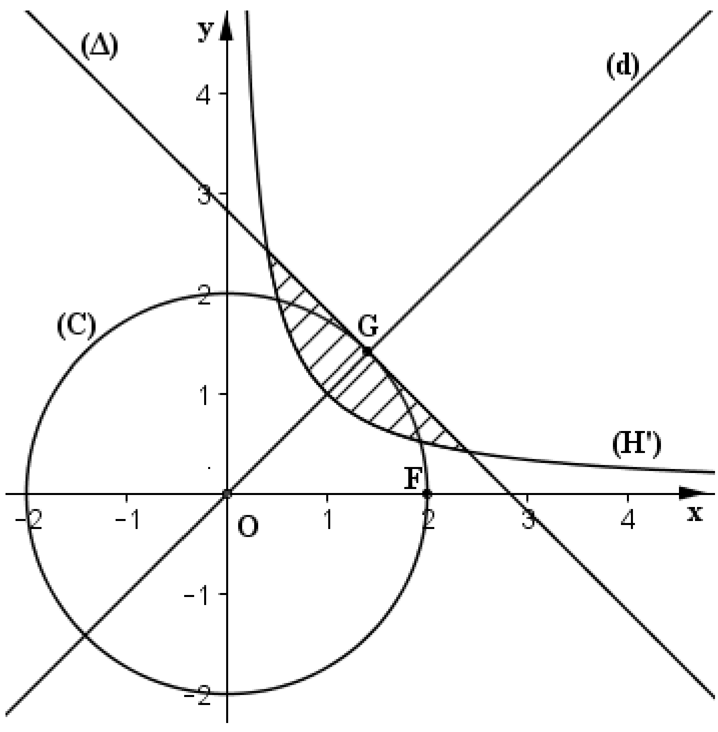


(H) est l'hyperbole équilatère de foyers F et F'.

1) a- Montrer que le point L appartient à (H).
   b- Montrer que la directrice (D) de (H) associée au foyer F est la médiatrice de [OF].
2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit F (2 ; 0) et $L\left(2\,;\sqrt{2}\right)$.
   a- Montrer que $x^2 - y^2 = 2$ est une équation de (H).
   b- Déterminer les coordonnées des sommets de (H) ainsi que les équations de ses asymptotes.
   c- Tracer (H).
3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

   Dans la figure ci-dessous :
   - (H') est l'image de (H) par la rotation R
   - (d) est la première bissectrice
   - (C) est le cercle de centre O et de rayon 2
   - G est l'un des points d'intersection de (C) et (d).

   a- Montrer que G est l'image de F par R.
   b- Soit (Δ) la droite passant par G et perpendiculaire à (d).
      Déterminer $R^{-1}(\Delta)$, où R^{-1} est la rotation réciproque de R.
   c- Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la partie hachurée autour de la droite (d).



VI- (7 points)

On considère la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par $f(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $xy'+2y=\frac{2\ln x}{x^2}$.

1) Montrer que $f'(x)=\frac{2(1-\ln x)\ln x}{x^3}$.
2) Montrer que $x f'(x)+2 f(x)=\frac{2\ln x}{x^2}$.
3) On pose $y=z+f(x)$ avec $z\neq 0$.
   a- Montrer qu'une équation différentielle (E') satisfaite par z est $\frac{z'}{z}=-\frac{2}{x}$.
   b- Résoudre (E') et en déduire la solution générale de (E).

Partie B

1) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire les deux asymptotes à (C).
2) a- Vérifier que f est strictement croissante sur]1 ; e[.
   b- Dresser le tableau de variations de f sur]0 , + ∞[et vérifier que $f(x)\geq 0$.
   c- Tracer (C).

Partie C

On définit, pour tout entier naturel non nul n, la suite (I_n) par $I_n=\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^n}dx$.

1) Calculer I_1.
2) a- Sachant que $\ln x < x$ pout tout $x\in[1\,;\,e]$, démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
   b- Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout entier naturel non nul n.
   c- En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3) a- Sachant que $\frac{(\ln x)^n}{x^n}\leq\frac{1}{x^n}$ pour tout $1\leq x\leq e$, montrer que $0\leq I_n\leq\frac{1-e^{-n+1}}{n-1}$.
   b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

عدد المسائل: ست

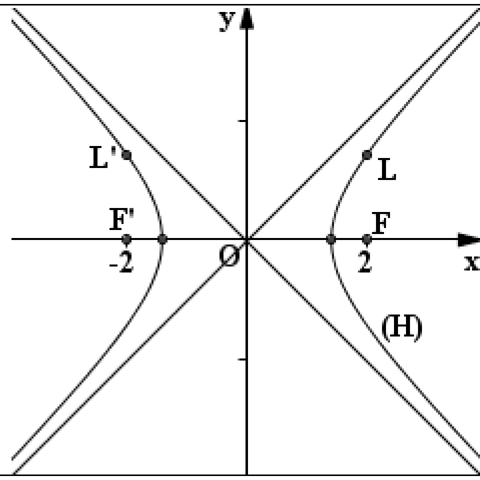
أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

I	Réponses	Note
1	$z=\dfrac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}$; $z\overline{z}-2z=\overline{z}+4$. Soit $z=x+iy$; $x^2+y^2-2x-2iy=x-iy+4$; $x^2+y^2-3x-4-iy=0$ alors $y=0$ et $x=-1$ ou $x=4$; $M(-1;0)$ ou $M(4;0)$	1
2a	$\lvert z'\rvert=\left\lvert\dfrac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}\right\rvert=\dfrac{\lvert\overline{z}+4\rvert}{\lvert\overline{z}-2\rvert}=\dfrac{\lvert\overline{z+4}\rvert}{\lvert\overline{z-2}\rvert}=\dfrac{\lvert z+4\rvert}{\lvert z-2\rvert}=\dfrac{AM}{BM}$. $\arg(z')=\arg\left(\dfrac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}\right)=\arg\overline{\left(\dfrac{z+4}{z-2}\right)}=-\arg\left(\dfrac{z+4}{z-2}\right)=\arg\left(\dfrac{z-2}{z+4}\right)+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$	1
2b	OM ' = 1 alors AM = BM donc M varie sur (Δ) la médiatrice de [AB].	0,5
2c	$\arg(z')=(2k+1)\pi$; $\arg\left(\dfrac{z-2}{z+4}\right)=(2k+1)\pi$; $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)=(2k+1)\pi \quad k\in\mathbb{Z}$ Alors M varie sur le segment [AB] privé de A et B.	0,5
2d	$z'=u^3=e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $\lvert z'\rvert=1$ alors $AM=BM$ et $\arg(z')=\dfrac{-\pi}{3}$ alors $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$. Donc MBA est un triangle équilatéral.	1

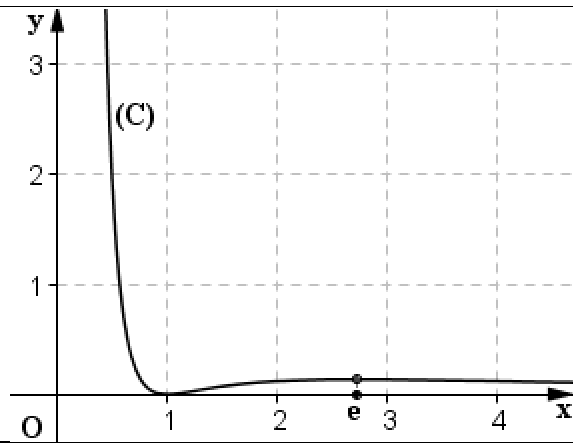
II	Réponses	Note
1a	$P(E/T)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$; $P(E\cap T)=P(T)\times P(E/T)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{32}$	1
1b	$P\left(E\cap\overline{T}\right)=P\left(\overline{T}\right)\times P\left(E/\overline{T}\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\right)=\dfrac{9}{40}$.	1
1c	$P(E)=P\left(E\cap T\right)+P\left(E\cap\overline{T}\right)=\dfrac{1}{32}+\dfrac{9}{40}=\dfrac{41}{160}$	0,5
2	$P\left(\overline{T}\ /E\right)=\dfrac{P\left(\overline{T}\cap E\right)}{P(E)}=\dfrac{\frac{9}{40}}{\frac{41}{160}}=\dfrac{36}{41}$	0,5
3a	$P(X=1)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\right)=\dfrac{33}{80}$	1
3b	$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\dfrac{33}{80}+\dfrac{41}{160}+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{111}{160}$ OU : $P(X\geq 1)=1-P\left(X=0\right)=1-\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}\right)\right)=\dfrac{111}{160}$	1

III	Réponses	Note
1	$\vec{V}_d(1;2;2)$ et $\vec{V}_{d'}(-1;2;-2)$ ne sont pas colinéaires. Pour $m=0$, $A\in(d)$. Pour $t=-1$, $A\in(d)$	**0,5**
2	Soit $M(x;y;z)\in(P)$ alors $\overrightarrow{AM}.\left(\vec{V}\wedge\vec{V}'\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0$; $(P):-2x+z+1=0$	**1**
3a	$-2x_I+z_I+1=0$ alors $I\in(P)$ $d(I,(d))=\dfrac{\lVert\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{V_d}\rVert}{\lVert\overrightarrow{V_d}\rVert}=3\sqrt{5}=R$; $d(I,(d'))=\dfrac{\lVert\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{V_d}\rVert}{\lVert\overrightarrow{V_d}\rVert}=3\sqrt{5}=R$	**1**
3b	$(AI):\begin{cases} x=1 \\ y=n+1 \\ z=1 \end{cases}$; $E(1;n+1;1)$; $IE=3\sqrt{5}$; $(n-9)^2=45$; $n=9+3\sqrt{5}$ ou $n=9-3\sqrt{5}$ $E(1;10+3\sqrt{5};1)$ et $F(1;10-3\sqrt{5};1)$	**1**
3c	$A_{ATIS}=2\times A_{ATI}=AT\times IT=\sqrt{IA^2-IT^2}\times3\sqrt{5}=\sqrt{81-45}\times3\sqrt{5}=18\sqrt{5}$	**0.5**
3d	$(\Delta):\begin{cases} x=-2k+1 \\ y=1 \\ z=k+1 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$; $B(-2k+1;1;k+1)$; $\overrightarrow{AB}(-2k;0;k)$; $V_{BATIS}=\dfrac{1}{3}\times A_{ATIS}\times AB$; $6\sqrt{5}AB=30$; $6\sqrt{5}\sqrt{5k^2}=30$; $30\vert k\vert=30$; $k=1$ ou $k=-1$ alors $B(-1;1;2)$ ou $B(3;1;0)$ ou $V=2.V'=2.\dfrac{1}{6}\left\lVert\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{AS}\wedge\overrightarrow{AI}\right)\right\rVert=30...$	**1**

IV	Réponses	Note
1a	$k=\dfrac{CD}{AB}=\sqrt{2}$; $\alpha=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)+2k\pi=\left(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{CD}\right)+2k\pi=\pi+\left(\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CD}\right)+2k\pi=\dfrac{-\pi}{4}+\pi=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$	**1**
1b	$\dfrac{OC}{OA}=\sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}+2k\pi=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$ alors $S(O)=O$. Donc O est le centre de S.	**1**
1c	S(E) = E' ; OABE est un carré direct alors OCDE' est un carré direct de centre F alors E' est le symétrique de C par rapport à F.	**1**
2a	l'aire de l'image $=\left(k^2\right)^n\times$ Aire de OABE ; $16=k^{2n}$; $16=2^n$; $n=4$. $S^4=S\left(O;\left(\sqrt{4}\right)^4;4\times\dfrac{3\pi}{4}\right)=H(O;-4)$ est une homothétie négative.	**1.5**
2b	$S^n=S\left(O;\left(\sqrt{2}\right)^n;\dfrac{3n\pi}{4}\right)$ est une homothétie positive si $\dfrac{3n\pi}{4}=2k\pi$; $3n=8k$ n est un multiple de 8 ; $n\in\{8;16;.....\}$ la plus petite valeur de n est 8.	**1.5**

V	Réponses	Note
1a	$FF'=4$; $c=2$; $a=b=\sqrt{2}$; $LF'-LF=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}=2a$ alors $L\in(H)$.	**1**
1b	$\overrightarrow{OF}=e\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OS}=e\overrightarrow{OK}$ alors $\overrightarrow{OF}=e^2\overrightarrow{OK}=2\overrightarrow{OK}$ où K est le point d'intersection de la directrice avec (FF') et S est un sommet (H). OU $d(O,(D))=1=\frac{a^2}{c}$ et $(D)\perp(FF')$: axe focal.	**0.5**
2a	$O(0;0)$ est le centre de (H); $(x'Ox)$ est l'axe focal ; $a=b=\sqrt{2}$ alors $(H): x^2-y^2=2$	**0.5**
2b	Sommets $A(\sqrt{2};0)$ et $A'(-\sqrt{2};0)$ Asymptotes $y=x$ et $y=-x$	**1**
2c		**0.5**
3a	$F=(C)\cap(x'Ox)$; $R(F)=R(C)\cap R(x'Ox)=(C)\cap(d)=G$ tel que $\left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OG}\right)=\frac{\pi}{4}$	**0.5**
3b	(Δ) passe par G et perpendiculaire à (d) $R^{-1}(\Delta)$ passe par $R^{-1}(G)$ et perpendiculaire à $R^{-1}(d)$ $R^{-1}(\Delta)$ passe par F et perpendiculaire à $(x'Ox)$	**1**
3c	$V=\pi\int_{\sqrt{2}}^{2} y^2dx=\frac{4\sqrt{2}-4}{3}\pi$ unité de volume.	**1**

VI	Réponses	Note
A1	$f'(x)=\frac{2x\ln x-2x(\ln x)^2}{x^4}=\frac{2\ln x-2(\ln x)^2}{x^3}=\frac{2(1-\ln x)\ln x}{x^3}$	**1**
A2	$xf'(x)+2f(x)=x\left(\frac{2\ln x-2(\ln x)^2}{x^3}\right)+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2=\frac{2\ln(x)}{x^2}$	**1**
A3a	$y=z+f(x)$; $y'=z'+f'(x)$; $xy'+2y=\frac{2\ln x}{x^2}$; $xz'+xf'(x)+2z+2f(x)=\frac{2\ln x}{x^2}$; $xz'+2z=0$ alors $\frac{z'}{z}=\frac{-2}{x}$	**1**

<table>
<tr><td>A3b</td><td>$\int \frac{z'}{z}dx = \int \frac{-2}{x}dx$; $\ln\left|z\right| = -2\ln\left|x\right| + K_1 = -\ln x^2 + \ln e^{K_1} = \ln\frac{K_2}{x^2}$; $z = \frac{C}{x^2}$; $y = \frac{C}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $x = 0$ et $y = 0$ sont les asymptotes à (C).</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B2a</td><td>$f'(x) = \frac{2(1-\ln x)\ln x}{x^3}$
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>e</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$1-\ln x$</td><td></td><td>+</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td></td></tr>
<tr><td>$\ln x$</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td></td></tr>
</table>
f est strictement croissante sur]1 ; e[.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B2b</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>e</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td></td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>$+\infty$</td><td>$\searrow$</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td><td>$\frac{1}{e^2}$</td><td>$\searrow$</td><td>0</td></tr>
</table>
le minimum de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$ est 0. Donc $f(x) \geq 0$ pour $x > 0$.</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>B2c</td><td>
</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>C1</td><td>$I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}.$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>C2a</td><td>$I_{n+1} - I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^{n+1}} - \frac{(\ln x)^n}{x^n}dx = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^n}\left(\frac{\ln x - x}{x}\right)dx \leq 0$
puisque $(\ln x)^n \geq 0$; $x^n > 0$ et $\ln x - x < 0$ pour $x \in [1;e]$. alors la suite (In) est décroissante.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>C2b</td><td>Pour $x \in [1;e]$, $(\ln x)^n \geq 0$ et $x^n > 0$ alors $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^n}dx \geq 0.$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>C2c</td><td>La suite (I_n) est décroissante et minorée par zéro alors elle est convergente.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>C3a</td><td>$\frac{(\ln x)^n}{x^n} \leq \frac{1}{x^n}$; $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^n}dx \leq \int_1^e \frac{1}{x^n}dx$; $I_n \leq \left.\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^e = \frac{1-e^{-n+1}}{n-1}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>C3b</td><td>$0 \leq I_n \leq \frac{1-e^{-n+1}}{n-1}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$</td><td>1</td></tr>
</table>