عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (علامتان)

المستوي الاحداثي المركّب عائد للنظام المتعامد الموجّه $\left(O\,;\,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

A و B نقطتان عائدتان للعددين المركّبين $z_A = -4$ و $z_B = 2$ على التوالي.

لتكن النقطتان M و'M عائدتين للعددين المركبين z و 'z حيث أن $z' = \dfrac{\bar{z}+4}{\bar{z}-2}$ مع $z \neq -4$ و $z \neq 2$.

١) حدّد احداثيات النقطة M عندما تتطابق النقطتان M و 'M.

٢) a - عبّر عن $|z'|$ بدلالة MA و MB ثم تحقق من أنّ $\arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-2}{z+4}\right) + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

b - برهن أنه عندما تتحرك النقطة 'M على الدائرة (C) التي مركزها O ونصف قطرها 1 فإن M تتحرك على المستقيم (Δ) الذي يجب تحديده.

c- حدّد مجموعة النقاط M إذا كان z' عدداً حقيقياً سالباً تماماً.

d- نعطي العدد المركّب $u = e^{-i\frac{\pi}{9}}$.
حدّد طبيعة المثلث MBA إذا كان u هو جذراً تكعيبياً للعدد المركّب z'.

II- (علامتان ونصف)

U_1 و U_2 جرّتان على الشكل الآتي:

- تحتوي الجرّة U_1 على طابة بيضاء واحدة وثلاث طابات سوداء
- تحتوي الجرّة U_2 على طابة حمراء واحدة وثلاث طابات بيضاء وطابتين سوداوين.

تم عشوائياً اختيار جرّة واحدة من الجرتين:

- إذا تم اختيار الجرة U_1، يتم عشوائياً سحب طابتان واحدة تلو الاخرى بدون ارجاع إلى الجرة U_1
- إذا تم اختيار الجرة U_2، يتم عشوائياً سحب ثلاث طابات واحدة تلو الاخرى مع ارجاع إلى الجرة U_2.

نفترض الأحداث الآتية:

T: "الجرة التي تم اختيارها هي U_1"

E: "تم بالتحديد سحب طابتين بيضاوين".

١) a- أحسب الاحتمالين $P(E/T)$ و $P(E\cap T)$.

b- برهن أن $P\left(E\cap\bar{T}\right) = \dfrac{9}{40}$.

c- استنتج P (E).

٢) عِلماً أنه تمّ بالتحديد سحب طابتين بيضاوين، أحسب احتمال أن تكون هاتين الطابتان مسحوبتان من الجرة U_2.

٣) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يساوي عدد الطابات البيضاء التي تم سحبها.

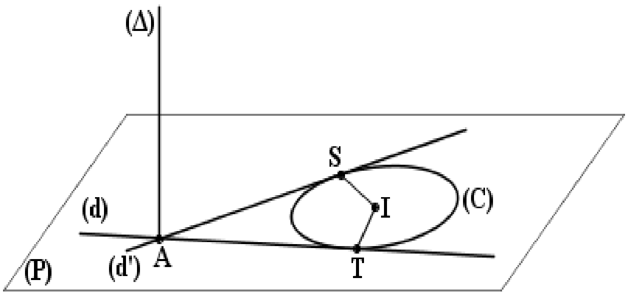
a- تحقق أن $P(X=1) = \dfrac{33}{80}$.

b- حدّد $P(X \geq 1)$.

III-(علامتان ونصف)

الفضاء الاحداثي منسوب الى النظام المتعامد الموّجه$\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j},\vec{k}\right)$.

ليكن المستقيمان (d) و(d’) ذوي المعادلات:



$(d):\begin{cases}x=m+1\\y=2m+1\\z=2m+1\end{cases}$ و $(d’):\begin{cases}x=-t\\y=2t+3\\z=-2t-1\end{cases}$ حيث $m,\,t\in\mathbb{R}$.

١) برهن ان المستقيمين (d) و(d') يتقاطعان عند النقطة $A(1\,,\,1\,,\,1)$.

٢) حدد معادلة للمستوي (P) المحدّد بالمستقيمين (d) و(d') .

٣) لتكن (C) الدائرة، ذات طول نصف القطر $3\sqrt{5}$، على مماس مع (d) عند النقطة T وعلى مماس مع (d') عند النقطة S.

ليكن (Δ) المستقيم المتعامد على (P) عند النقطة A.

a- برهن أنّ النقطة $I(1\,,\,10\,,\,1)$ هي مركز الدائرة (C).

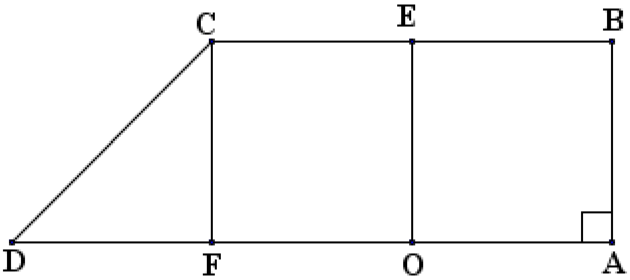
b- أحسب إحداثيات النقطتين E و F على (C) واللتان تكونان على المسافة نفسها من (d) و (d').

c- برهن ان مساحة الشكل الرباعي ATIS هي $18\sqrt{5}$.

d- حدّد إحداثيات النقطتين B على (Δ) حيث يكون حجم المجسّم BATIS يساوي 30.

IV-(ثلاث علامات)

في الرسم المجاور:



- ABEO و OECF مربّعان موجّهان طول ضلع كل منهما 1
- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ حيث $k\in\square$
- D هي نظير النقطة O بالنسبة الى F.

ليكن S التشابه الذي يحوّل A الى C وB الى D.

١) a- برهن أن نسبة S تساوي $\sqrt{2}$ واحدى زواياها هي $\frac{3\pi}{4}$.

b- برهن أن النقطة O هي مركز التشابه S.

c- حدّد S(E).

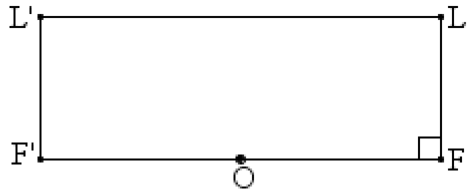
٢) ليكن S^n التحويل المعرّف كما يلي $S^n=\underbrace{S\ o\ S\ o\ S\ o...o\ S}_{n\text{ مرات}}$ حيث أن n هو عدد صحيح و$n\geq 2$.

a- حدّد قيمة n عندما تكون صورة المربّع OABE بواسطة S^n مربعاً مساحته 16.
واستنتج، في هذه الحالة، أن S^n هي تمدّد سالب.

b- حدّد اصغر قيمة ممكنة لـلعدد الصحيحِ n بحيث يكون S^n تمدّدًا موجبًا.

V- (ثلاث علامات)

في الرسم المقابل:



- F'FLL' هو مستطيل حيث أن: $F'F = 4$ و $FL = \sqrt{2}$.
- النقطة O هي منتصف [FF'].

(H) هو قطع زائد قائم، بؤرتاه F و F'.

١) a- برهن ان النقطة L موجودة على (H).

b- برهن ان المستقيم الموجّه (D) لِـ (H) المرتبط بالبؤرة F هو المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة [OF].

٢) ليكن المستوي الاحداثي المتعامد الموجّه $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ حيث أن $F(2\,,\,0)$ و $L\left(2\,,\,\sqrt{2}\right)$.

a- برهن أن $x^2 - y^2 = 2$ هي معادلة لِـ (H).

b- حدد إحداثيات رأسيْ (H) ومعادلتي مقاربيْه.

c- ارسم (H).

٣) لنفترض الدوران R ذا المركز O والزاوية $\frac{\pi}{4}$.

في الرسم أدناه:

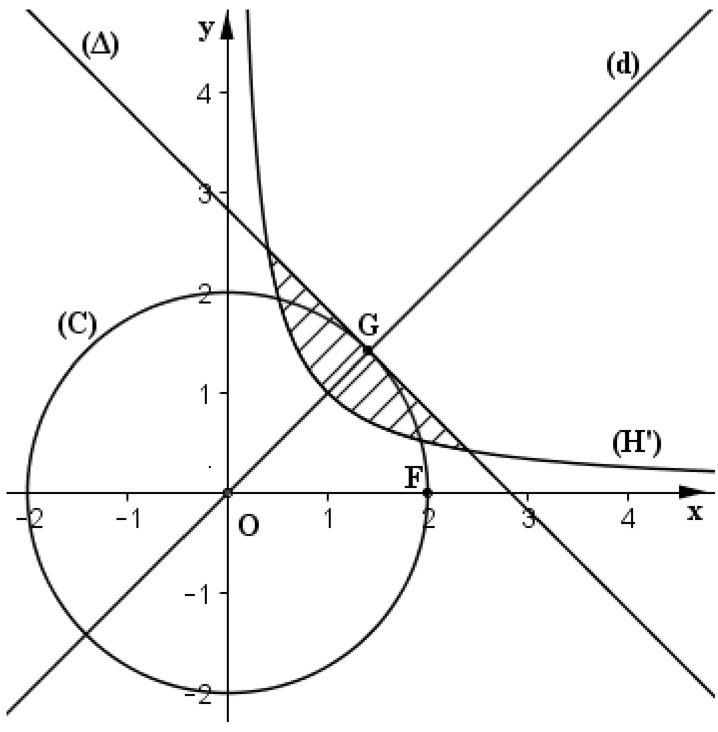
- (H') هو صورة (H) بواسطة الدوران R
- (d) هو المنصّف الأول
- (C) هي الدائرة ذات المركز O وطول نصف القطر 2
- G هي احدى نقاط التقاطع بين (C) وَ (d).

a- برهن ان G هي صورة F بواسطة R.

b- (Δ) المستقيم الذي يمر بالنقطة G ويتعامد على (d).

حدّد $R^{-1}(\Delta)$، حيث أن R^{-1} هو الدوران العكسي لِـ R.

c- اِحسب حجم المجسم الناتج عن دوران الجزء المظلل حول (d).



VI-(سبع علامات)

لتكن f الدالّة المعرّفة على $]0\ ,\ +\ \infty[$ على الشكل الآتي: $f(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$.

نرمز بالحرف (C) إلى بيان الدالّة f في المستوي الإحداثي المتعامد العائد للنظام $\left(O;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

القسم الأول

لنفترض المعادلة التفاضلية (E): $xy'+2y=\frac{2\ln x}{x^2}$.

١) برهن أن $f'(x)=\frac{2(1-\ln x)\ln x}{x^3}$.

٢) برهن أن $x\,f'(x)+2f(x)=\frac{2\ln x}{x^2}$.

٣) ليكن $y=z+f(x)$ حيث $z\neq 0$.

a- برهن أن إحدى المعادلات التفاضلية (E') التي تحققها z هي $\frac{z'}{z}=-\frac{2}{x}$.

b- حلّ (E') ثم استنتج الحل العام للمعادلة (E).

القسم الثاني

١) حدّد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$. استنتج مقاربيْ البيان (C).

٢) a- تحقق ان f هي دالّة متزايدة تماماً على المجال $]1\ ,\ e[$.

b- انشىء جدول التغيرات للدالة f على المجال $]0,+\infty[$ وتحقق أن $f(x)\geq 0$.

c- ارسم (C).

القسم الثالث

لكل الاعداد الصحيحة n $(n>0)$، لتكن المتتالية (I_n) المعرّفة كما يلي $I_n=\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^n}dx$.

١) احسب I_1.

٢) a- علماً أن $\ln x<x$ لكل قيم $x\in[1\ ,\ e]$ ، برهن أن المتتالية (I_n) متناقصة.

b- برهن أن $I_n\geq 0$ لكل الاعداد الصحيحة n $(n>0)$.

c- استنتج أن المتتالية (I_n) متقاربة.

٣) a- نفترض أن $\frac{(\ln x)^n}{x^n}\leq\frac{1}{x^n}$ لكل $1\leq x\leq e$. برهن أن $0\leq I_n\leq\frac{1-e^{-n+1}}{n-1}$.

b- اِحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.