

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

مسابقة في مادة الرياضيات

المدة: ساعتان

باللغة الفرنسيّة

الاسم :

الرقم :

I- (4 points)

Le tableau ci-dessous représente, entre l'année 1990 et l'année 2015, la population (y_i) d'un certain village et le rang de l'année (x_i) correspondante.

Année	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Rang de l'année: x_i	0	5	10	15	20	25
Population: y_i	5 445	5 940	6 285	6 695	7 085	7 550

Partie A

- 1) Calculer \bar{X} et \bar{Y} , les moyennes respectives des deux variables x_i et y_i .
- 2) Calculer le pourcentage d'augmentation de la population entre 1990 et 2015.
- 3) Trouver le coefficient de corrélation r.

Interpréter la valeur trouvée.

- 4) Déterminer l'équation de la droite de régression, de y en x,

$$(D_{y/x}) : y = mx + n$$

où m et n sont deux réels (arrondir m et n à 10^{-1} près).

Partie B

On suppose que le modèle précédent reste valable jusqu'à l'année 2024.

- 1) Résoudre l'inéquation $y > 8250$.

Déterminer l'année durant laquelle la population de ce village dépasse **8 250** pour la première fois.

- 2) Dans ce village, **le nombre de personnes** qui utilisent l'internet en l'année 2018 était **2 000**.

On suppose que ce nombre **augmente** chaque année **de 100 personnes**.

a- **Calculer** le nombre de personnes de ce village qui utilisent l'internet en l'année 2024.

b- En 2024, on suppose que deux personnes sont interrogées successivement et au hasard dans ce village. **Calculer** la probabilité que ces deux personnes utilisent l'internet.

II- (4 points)

Dans un club sportif :

- **40 %** des membres sont des filles, **parmi** elles **30 %** participent à la compétition nationale
- **60 %** des membres sont des garçons, **parmi** eux **80 %** participent à la compétition nationale.

Partie A

On choisit au hasard un membre de ce club.

On considère les événements suivants :

F : « le membre choisi est une fille »

G : « le membre choisi est un garçon »

C : « le membre choisi participe à la compétition nationale ».

1) Calculer la probabilité $P(F \cap C)$.

Vérifier que $P(C) = \frac{3}{5}$.

2) Le membre choisi n'a pas participé à la compétition nationale.

Calculer la probabilité que ce membre est un garçon.

Partie B

Ce club compte **50** membres.

La direction de ce club a décidé de choisir **simultanément** et **au hasard** un groupe de trois membres pour représenter le club à l'étranger.

1) Vérifier que le nombre de filles de ce club est **20**.

Déterminer alors le nombre de garçons de ce club.

2) Vérifier que la probabilité de choisir un groupe formé de deux filles et d'un

garçon est égale à $\frac{57}{196}$.

3) Vérifier que la probabilité de choisir un groupe formé par au moins une fille

et au moins un garçon est $\frac{36}{49}$.

III- (4 points)

Hadi est un employé dans une banque.

En janvier 2018, le salaire mensuel de Hadi était **1 500 000 LL**.

Chaque mois son salaire augmente de 0,2 % et d'un supplément de 48000 LL.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on désigne par a_n le salaire mensuel de Hadi, en millions LL, du $n^{\text{ième}}$ mois. Ainsi $a_1 = 1,5$.

1) **Calculer a_2 .**

2) On a, pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = (1,002)a_n + 0,048$.

a- On pose $V_n = a_n + 24$.

Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison **1,002** dont on déterminera le 1^{er} terme V_1 .

b- **Exprimer V_n** en fonction de n .

Vérifier que $a_n = 25,5 \times (1,002)^{n-1} - 24$, pour tout $n \geq 1$.

3) Hadi veut acheter **une voiture** qui coûte **25 000 000 LL**.

La banque lui propose **à partir du mois de Janvier 2018** l'offre suivante :

Chaque mois, retirer 700 000 LL de son salaire mensuel et les placer dans un compte d'épargne à taux d'intérêt annuel de 6 % capitalisé mensuellement.

a- **Vérifier** que la somme dans le compte de Hadi, après n mois, est exprimée par

$$\left[140(1,005)^n - 140 \right] \text{ millions LL pour tout } n \geq 1.$$

b- **Résoudre l'inéquation** $140(1,005)^n - 140 \geq 25$.

Déterminer le nombre minimal de mois nécessaires à Hadi pour qu'il puisse acheter cette voiture.

IV- (8 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - xe^{x-1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

En déduire une asymptote à (C) .

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et calculer $f(2)$.

3) Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		—
$f(x)$		

a- **Recopier** et compléter le tableau donné.

b- **Montrer** que $x = 1$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

4) **Tracer** (C) .

5) L'aire du domaine délimité par (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ est égale à $(e - \ln 2)$ unités d'aires.

- Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

- Utiliser cette aire pour calculer la valeur exacte de $\int_1^2 xe^{x-1} dx$.

Partie B

Une usine fabrique un certain détergent liquide.

Le coût marginal C_m de production de cette usine est modélisé par

$$C_m(x) = (x+1)e^{x-1}, \text{ en millions LL,}$$

où x est la quantité produite de ce détergent, en milliers de litres; $x \in [0;5]$.

1) Sachant que les coûts fixes de cette usine s'élèvent à **1 000 000 LL**, montrer que le coût total C_T de production de cette usine est modélisé par

$$C_T(x) = xe^{x-1} + 1 \text{ en millions LL.}$$

2) On désigne par C_M le coût moyen de production de cette usine.

a- **Vérifier** que $C_M(x) - C_m(x) = f(x)$ où $x \in]0;5]$ et $C_M(x)$ est en millions LL.

b- Dans cette partie, on admet que le coût moyen est minimum s'il est égal au coût marginal : $C_{M \text{ minimal}}(x) = C_m(x)$

Déterminer, en litres, la quantité à produire de ce détergent pour que le coût moyen soit minimum.

3) a- Pour une certaine raison, l'usine a vendu **60 %** de sa production à **5 000 LL** le litre et **40 %** à **2 500 LL** le litre.

Sachant que toute la quantité produite de ce détergent est vendue,

Vérifier que le revenu en millions LL est $R(x) = 4x$.

b- Cette usine a produit **1 800** litres de ce détergent et a vendu les **75 %** de cette production.

Calculer le nombre de litres vendus par cette usine.

Est-ce-que le revenu réalisé couvre le coût de production? **Justifier.**