عدد المسائل: اربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

Le tableau ci-dessous représente, entre l'année 1990 et l'année 2015, la population (y_i) d'un certain village et le rang de l'année (x_i) correspondante.

Année	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Rang de l'année: x_i	0	5	10	15	20	25
Population: y_i	5 445	5 940	6 285	6 695	7 085	7 550

Partie A

1) Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, les moyennes respectives des deux variables x_i et y_i .
2) Calculer le pourcentage d'augmentation de la population entre 1990 et 2015.
3) Trouver le coefficient de corrélation r. Interpréter la valeur trouvée.
4) Déterminer l'équation de la droite de régression, de y en x, $(D_{y/x})$: $y = mx + n$
   où m et n sont deux réels (arrondir m et n à 10^{-1} près).

Partie B

On suppose que le modèle précédent reste valable jusqu'à l'année 2024.

1) Déterminer l'année durant laquelle la population de ce village dépasse 8 250 pour la première fois.
2) Dans ce village, le nombre de personnes qui utilisent l'internet en l'année 2018 était 2 000.
   On suppose que ce nombre augmente chaque année de 100 personnes.
   a- Calculer le nombre de personnes de ce village qui utilisent l'internet en l'année 2024.
   b- En 2024, on suppose que deux personnes sont interrogées successivement et au hasard dans ce village. Calculer la probabilité que ces deux personnes utilisent l'internet.

II- (4 points)

Dans un club sportif :

- 40 % des membres sont des filles, parmi elles 30 % participent à la compétition nationale
- 80 % des garçons participent à la compétition nationale.

Partie A

On choisit au hasard un membre de ce club.
On considère les événements suivants :
F : « le membre choisi est une fille »
G : « le membre choisi est un garçon »
C : « le membre choisi participe à la compétition nationale ».

1) Calculer la probabilité $P(F \cap C)$ et vérifier que $P(C) = \frac{3}{5}$.
2) Le membre choisi n'a pas participé à la compétition nationale.
   Calculer la probabilité que ce membre est un garçon.

Partie B

Ce club compte 50 membres. La direction de ce club a décidé de choisir simultanément et au hasard un groupe de trois membres pour représenter le club à l'étranger.

1) Calculer le nombre de filles et le nombre de garçons de ce club.
2) Vérifier que la probabilité de choisir un groupe formé de deux filles et d'un garçon est égale à $\frac{57}{196}$.
3) Calculer la probabilité de choisir un groupe formé par au moins une fille et au moins un garçon.

III- (4 points)

Hadi est un employé dans une banque.

En janvier 2018, le salaire mensuel de Hadi était 1 500 000 LL. Chaque mois son salaire augmente de 0,2 % et d'un supplément de 48 000 LL. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on désigne par a_n le salaire mensuel de Hadi, en millions LL, du $n^{\text{ième}}$ mois. Ainsi $a_1 = 1,5$.

1) Calculer a_2.
2) On a, pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = (1,002)a_n + 0,048$.
   a- On pose $V_n = a_n + 24$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera le 1^{er} terme V_1.
   b- Montrer que $a_n = 25,5 \times (1,002)^{n-1} - 24$ pour tout $n \geq 1$.
3) Hadi veut acheter une voiture qui coûte 25 000 000 LL.
   La banque lui propose à partir du mois de Janvier 2018 l'offre suivante :
   Chaque mois, retirer 700 000 LL de son salaire mensuel et les placer dans un compte d'épargne à taux d'intérêt annuel de 6 % capitalisé mensuellement.
   a- Vérifier que la somme dans le compte de Hadi, après n mois, est exprimée par $\left[140(1,005)^n - 140\right]$ millions LL pour tout $n \geq 1$.
   b- Déterminer le nombre minimal de mois nécessaires à Hadi pour qu'il puisse acheter cette voiture.

IV- (8 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - xe^{x-1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et en déduire une asymptote à (C).
2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et calculer f(2).
3) Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction f.
   a- Recopier et compléter le tableau donné.
   b- Montrer que x = 1 est l'unique solution de l'équation f(x) = 0.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$			

4) Tracer (C).
5) L'aire du domaine délimité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x = 1 et x = 2 est égale à (e – ln2) unités d'aires. Utiliser cette aire pour calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 xe^{x-1}dx$.

Partie B

Une usine fabrique un certain détergent liquide.

Le coût marginal C_m de production de cette usine est modélisé par $C_m(x) = (x+1)e^{x-1}$, en millions LL, où x est la quantité produite de ce détergent, en milliers de litres; $x \in [0;5]$.

1) Sachant que les coûts fixes de cette usine s'élèvent à 1 000 000 LL, montrer que le coût total C_T de production de cette usine est modélisé par $C_T(x) = xe^{x-1} + 1$ en millions LL.
2) On désigne par C_M le coût moyen de production de cette usine.
   a- Vérifier que $C_M(x) - C_m(x) = f(x)$ où $x \in]0;5]$ et $C_M(x)$ est en millions LL.
   b- Dans cette partie, on admet que le coût moyen est minimum s'il est égal au coût marginal.
   Déterminer, en litres, la quantité à produire de ce détergent pour que le coût moyen soit minimum.
3) a- Pour une certaine raison, l'usine a vendu 60 % de sa production à 5 000 LL le litre et 40 % à 2 500 LL le litre. Sachant que toute la quantité produite de ce détergent est vendue, déterminer en millions LL le revenu R(x).
   b- Cette usine a produit 1 800 litres de ce détergent et a vendu les 75 % de cette production.
   Est-ce-que le revenu réalisé couvre le coût de production? Justifier.

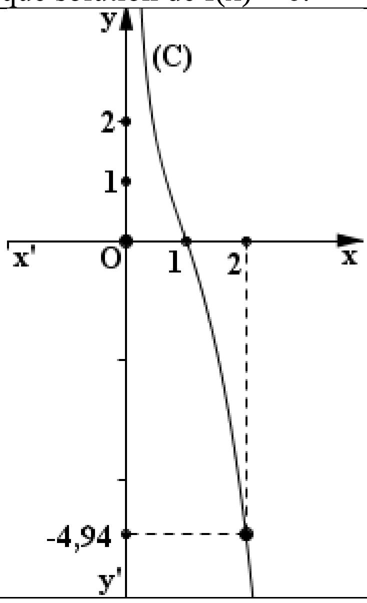
وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات الرسمية

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: الاجتماع والاقتصاد

دورة العام ٢٠١٩ الاستثنائية
السبت ٣ آب ٢٠١٩

أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

I	Réponses	7 pts
A1	$\overline{x} = 12{,}5$; $\overline{y} = 6500$.	1
A2	% d'augmentation = $\frac{7550-5445}{5445}\times 100 = 38{,}6$	1
A3	r = 0,99, forte corrélation positive entre les deux variables x_i et y_i.	0,5
A4	$y = 82{,}1x + 5473{,}6$	1
B1	$y > 8250$; $82{,}1x + 5473{,}6 > 8250$; $x > 33.8$; $x = 34$; La population du village dépasse 8 250 pour la 1re fois en 2024	1,5
B2a	Le nombre de personnes de ce village qui utilisent l'internet en l'année 2024 est $2000 + 100\times 6 = 2600$	0,5
B2b	$x = 34$; $y = 82{,}1(34) + 5473{,}6 = 8265$ $P = \frac{2600}{8265}\times\frac{2599}{8264} = 0{,}099$	1,5
II	**Réponses**	**7 pts**
A1	$P(F\cap C) = P(F)\times P(C/F) = 0{,}4\times 0{,}3 = 0{,}12$ $P(C) = P(F\cap C) + P(G\cap C) = 0{,}12 + P(G)\times P(C/G) = 0{,}12 + 0{,}6\times 0{,}8 = \frac{3}{5}$.	2
A2	$P(G/\overline{C}) = \frac{P(G\cap\overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(G)\times P(\overline{C}/G)}{1-0{,}6} = \frac{0{,}6\times 0{,}2}{0{,}4} = 0{,}3$	1,5
B1	Le nombre de filles est de 0.4×50 = 20 et le nombre de garçons est de 50 - 20 = 30	0,5
B2	$P(2F\,\text{et}\,1G) = \frac{C_{20}^{2}\times C_{30}^{1}}{C_{50}^{3}} = \frac{57}{196}$	1,5
B3	P(au moins une fille et au moins un garçon) = P(2G et 1F) + P(2F et 1G) = $\frac{C_{30}^{2}\times C_{20}^{1}}{C_{50}^{3}} + \frac{57}{196} = \frac{36}{49}$	1,5
III	**Réponses**	**7 pts**
1	$a_2 = 1{,}5 + 1{,}5\times 0{,}002 + 0{,}048 = 1{,}551$ millions LL.	1
2a	$V_{n+1} = a_{n+1} + 24 = 1{,}002\, a_n + 24{,}048 = 1{,}002(a_n + 24) = 1{,}002\, V_n$ alors (V_n) est une suite géométrique de raison q = 1,002 et de 1er terme $V_1 = 25{,}5$	1,5
2b	$V_n = 25{,}5(1{,}002)^{n-1}$; $a_n = V_n - 24 = 25{,}5(1{,}002)^{n-1} - 24$	1
3a	$S = \frac{R\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} = \frac{0.7\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{200}} = 140\left(1{,}05^n - 1\right) = 140(1{,}005)^n - 140\ \text{millions LL}$ OU $S = \frac{700000\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{200}} = 140000000\left(1{,}005^n - 1\right)\text{LL};\ S = 140(1{,}005)^n - 140\ \text{millions LL}$	2
3b	$140(1{,}005)^n - 140 \geq 25$; $(1{,}005)^n \geq \frac{33}{28}$; $n \geq 32{,}9$ alors $n = 33$ donc après 33 mois	1,5

IV	Réponses	14 pts
A1	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ donc $x = 0$ est une asymptote.	**1**
A2	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $f(2) = \frac{1}{2} - 2e = -4,93$	**1**
A3a	$\begin{array}{c\|c\|c} x & 0 & \qquad\qquad +\infty \\ \hline f'(x) & \| & - \\ \hline f(x) & \| & +\infty \searrow -\infty \end{array}$	**0,5**
A3b	Sur $]0, +\infty[$: f est continue et strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$, alors f(x) = 0 admet une solution unique, et comme f(1) = 0 donc 1 est l'unique solution de f(x) = 0.	**1**
A4		**1,5**
A5	$A = -\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - xe^{x-1}\right)dx \;=\; -\int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_1^2 xe^{x-1}dx = e - \ln 2$; $-\ln x]_1^2 + \int_1^2 xe^{x-1}dx = e - \ln 2$; $\int_1^2 xe^{x-1}dx = e$	**1,5**
B1	$C_T(0) = 1$ $C_T'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1} = M_C(x)$	**1,5**
B2a	$\overline{C}(x) - M_C(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x} - (x+1)e^{x-1} = \frac{1}{x} - xe^{x-1} = f(x).$	**1**
B2b	Le coût moyen est minimal lorsque $\overline{C}(x) = M_C(x)$; f(x) = 0 ; x = 1 Le coût moyen est minimal lorsque la production est de 1000 litres	**2**
B3a	$R(x) = \left(\frac{5000\times1000}{1000000}\right)(0,6x) + \left(\frac{2500\times1000}{1000000}\right)(0,4x) = 4x$ millions LL	**1,5**
B3b	75% (1800) = 1350 R(1,35) = 5,4 millions LL $C_T(1,8)$ = 5,005 millions LL. Oui, car R(1,35) > $C_T(1,8)$	**1,5**