وزارة التربية والتعليم العالي
المديريّـة العامة للتربية
دائرة الامتحانات الرسمية

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: علوم الحياة

دورة الـعام 2019 العاديّة
الثلاثاء 18 حـزيران 2019

عدد المسائل: اربع

مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ساعتان

الاسم:
الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les points

A(4 ; 1 ; 4), B(1 ; 0 ; 1), E(3 ; –1 ; 1) et le plan (P) d'équation $x + 2y + 3z - 4 = 0$.

1) Montrer que le point E est le projeté orthogonal du point A sur le plan (P).
2) a- Déterminer une équation du plan (Q) déterminé par A, B et E.

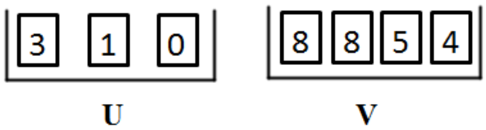
   b- Vérifier que les deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
3) Soit (d) la droite d'intersection de (P) et (Q).

   Montrer qu'un système d'équations paramétriques de (d) est $\begin{cases} x = -2t+1 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.
4) On considère, dans le plan (P), le cercle (C) de centre E et de rayon $\sqrt{5}$.

   Montrer que la droite (d) coupe le cercle (C) en deux points dont on déterminera leurs coordonnées.

II- (4 points)

On dispose de deux urnes U et V :



- U contient trois cartes portant les numéros 3, 1 et 0 ;
- V contient quatre cartes portant les numéros 8, 8, 5 et 4.

On tire au hasard une carte de l'urne U :

- Si la carte tirée porte le numéro 0, on tire simultanément et au hasard deux cartes de l'urne V ;
- Si la carte tirée ne porte pas le numéro 0, on tire simultanément et au hasard trois cartes de l'urne V.

On considère les évènements suivants :

A : « La carte tirée de l'urne U porte le numéro 0 » ;

S : « La somme des numéros portés par les cartes tirées de l'urne V est paire ».

1) a- Calculer les probabilités $P(S/A)$ et $P(S\cap A)$.

   b- Vérifier que $P\left(S\cap\overline{A}\right) = \frac{1}{6}$ et calculer P(S).
2) La somme des numéros portés par les cartes tirées de V est paire. Calculer la probabilité que la carte tirée de l'urne U ne porte pas le numéro 0.
3) Soit X la variable aléatoire égale au produit des numéros portés par les cartes tirées des urnes U et V. Calculer $P(X = 0)$ et déduire $P(X \le 160)$.

III- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' tel que $z' = (1 + i)\,\overline{z}$.

1) Dans cette partie, on pose $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   a- Ecrire z' sous forme exponentielle.
   b- Vérifier que $(z')^6$ est imaginaire pur.
2) a- Montrer que $|z'| = \sqrt{2}\,|z|$.
   b- En déduire que, si M varie sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, alors M' varie sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
3) On pose z = x + iy et z' = x' + iy' où x , y , x' et y' sont des nombres réels.
   a- Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   b- Pour tout $z \neq 0$, on note par N le point d'affixe $\overline{z}$.
   Démontrer que le triangle ONM' est rectangle isocèle de sommet principal N.

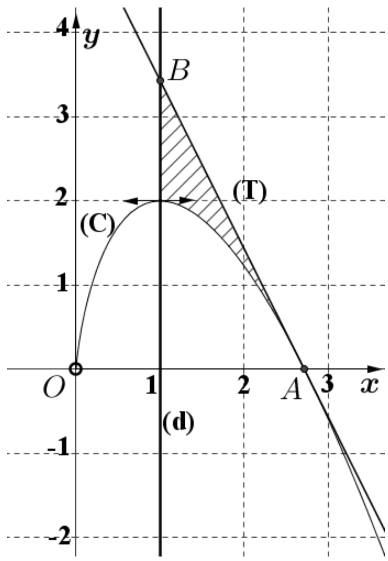
IV- (8 points)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x(1-\ln x)$. On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) a- Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
   Déterminer les coordonnées de A.
   b- Montrer que $f'(x) = -2\ln x$ et dresser le tableau de variations de f.
   c- Déterminer une équation de la tangente (T) en A à (C).

Dans la figure ci-contre :

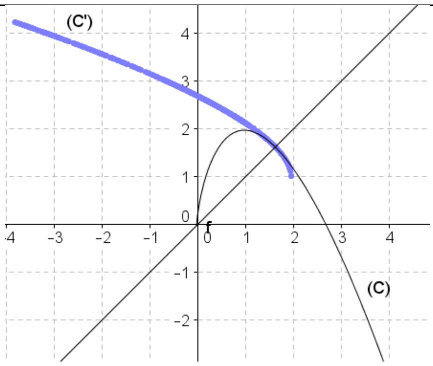
- (C) est la courbe représentative de f.
- (T) est la tangente en A à (C).
- (d) est la droite d'équation $x = 1$.
- $B(1\,;\,2e-2)$ est le point d'intersection de (d) et (T).



3) a- Montrer que, sur $]1;+\infty[$, f admet une fonction réciproque g dont on déterminera son domaine de définition.
   b- Dresser le tableau de variation de la fonction g.
   c- Reproduire (C) puis tracer (C'), la courbe représentative de g, dans le même repère.
4) a- En utilisant une intégration par parties, déterminer $\int x\ln(x)\,dx$.
   b- Montrer que $\int_1^e f(x)\,dx = \frac{e^2-3}{2}$.
   c- Calculer l'aire du domaine hachuré délimité par (C), (T) et (d).

أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

Q.I	Eléments de réponses	4 pts
1	$x_E + 2(y_E) + 3(z_E) - 4 = 0$, $3 - 2 + 3 - 4 = 0$ donc $E \in (P)$. $\overrightarrow{EA}(1,2,3) = \overrightarrow{n_P}$ alors E est le projeté orthogonale du point A sur le plan (P). Ou : $(AE): \begin{cases} x = n+4 \\ y = 2n+1 \\ z = 3n+4 \end{cases}$; E(n+4 ; 2n+1; 3n+4) ; $x_E + 2(y_E) + 3(z_E) - 4 = 0$ alors n = -1 donc, E(3; –1; 1)	1
2.a	Soit $M(x, y, z) \in (Q)$ $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE}) = 0$ $\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-4 \\ -3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$ donc (Q): 3x + 6y -5z + 2 = 0.	1
2.b	$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_P} = 3 + 12 - 15 = 0$, alors les deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.	½
3	Pour tout $M(-2t + 1; t ; 1) \in (d)$, $x_M + 2(y_M) + 3(z_M) - 4 = 0$ donc $M \in (P)$ $3x_M + 6y_M - 5z_M + 2 = 0$ donc $M \in$ **(Q)**	½
4	M(–2t + 1; t ; 1); $\overrightarrow{EM}$ (–2t – 2; t + 1; 0) $EM = \sqrt{5}$; $(-2t-2)^2 + (t+1)^2 = 5$, alors t = 0 ou t = –2 . Par suite B(1 ; 0 ; 1) et I(5 ; –2 ; 1) sont les points d'intersection de (C) et (d).	1
Q.II	**Eléments de réponses**	**4 pts**
1.a	$P(S/A) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{2}$, $P(S \cap A) = P(S/A) \times P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	½ ½
1.b	$P(S \cap \overline{A}) = P(S/\overline{A}) \times P(\overline{A}) = \frac{C_3^3}{C_4^3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ $P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap \overline{A}) = \frac{1}{3}$	½ ½
2	$P(\overline{A}/S) = \frac{P(S \cap \overline{A})}{P(S)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$	1
3	$P(X = 0) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$ $P(X \leq 160) = P(X = 0) + P(X = 160)$ $= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^1\, C_1^1\, C_1^1}{C_4^3}$ $= \frac{5}{12}$	½ ½
Q.III	**Eléments de réponses**	**4 pts**
1.a	$z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{-\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{12}}$	½
1.b	$(z')^6 = (\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{12}})^6 = 8e^{i\frac{-\pi}{2}} = -8i$ est imaginaire pur. Ou $\arg(z'^6) = 6\arg(z')\ [2\pi] = 6 \times (\frac{-\pi}{12})\ [2\pi] = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc (z'^6) est imaginaire pur .	½

2.a	$\lvert z'\rvert = \lvert 1+i\rvert \lvert\overline{z}\rvert$; $\lvert z'\rvert = \sqrt{2}\lvert z\rvert$	½
2.b	$OM = \sqrt{2}$; $\lvert z'\rvert = \sqrt{2}\lvert z\rvert$; $OM' = \sqrt{2}OM = 2$ donc M' varie sur le cercle de centre O et rayon 2.	**1**
3.a	$x' + iy' = (1+i)(x-iy) = x + y + i(x-y)$ donc $x' = x + y$ et $y' = x - y$.	½
3.b	$N(\overline{z})$ alors $N(x; -y)$; $M'(z')$ alors $M'(x+y; x-y)$ $\overrightarrow{ON}(x; -y)$; $\overrightarrow{NM'}(y; x)$ $ON = NM' = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{NM'} = xy - yx = 0$, donc ONM' est un triangle rectangle isocèle en N. **Ou:** $\frac{z'}{\overline{z}} = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, then $OM' = \sqrt{2}ON$ $\left(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc ONM' est un triangle rectangle isocèle en N. **Ou:** $\frac{z'-\overline{z}}{\overline{z}} = i$ ……. donc ONM' est un triangle rectangle isocèle en N.	**1**
Q.IV	**Eléments de réponses**	**8 pts**
1	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x - 2x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x(1-\ln x) = -\infty$	**1**
2.a	$2x(1-\ln x) = 0$; $x = 0$ rej $1 - \ln x = 0$; $\ln x = 1$ alors $x = e$ donc $A(e; 0)$	½
2.b	$f'(x) = 2(1-\ln x) + (2x)(-1/x) = -2\ln x$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & 0 & \nearrow & 2 & \searrow & -\infty \end{array}$	¼ ¾
2.c	$f'(e) = -2$ (T): $y = -2x + 2e$	½
3.a	f est continue strictement décroissante $]1;+\infty[$, alors f admet une fonction réciproque g. $D_g =]-\infty; 2[$	¼ ¼
3.b	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & 2 \\ \hline g'(x) & & - & \\ \hline g(x) & +\infty & \searrow & 1 \end{array}$	**1**
3.c	 	**1 ½**
4.a	$\int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$	**1**
4.b	$\int_1^e f(x)dx = \int_1^e 2xdx - 2\int_1^e x\ln xdx = x^2 - 2\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right) = \left.\frac{3x^2}{2} - x^2\ln x\right]_1^e = \frac{e^2-3}{2}$	½
4.c	Area = $\frac{(e-1)(2e-2)}{2} - \int_1^e f(x)dx = e^2 - 2e + 1 - \frac{e^2-3}{2} = \frac{e^2-4e+5}{2} = 0.758u^2$	½