وزارة التربية والتعليم العالي
المديريّة العامّة للتربية
دائرة الامتحانات الرسميّة

امتحانات الشهادة الثانوية العامّة
فرع العلوم العامّة

دورة العام ٢٠١٩ العاديـة
السبت ٢٢ حزيران ٢٠١٩

عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات	الاسم:
	المدة: أربع ساعات	الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (2 points)

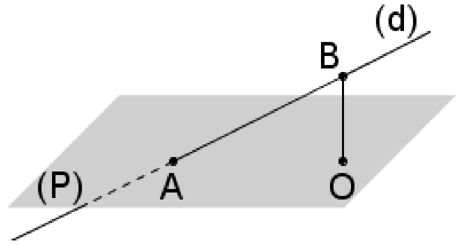
Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses		
		a	b	c
1	z est un nombre complexe. Une des racines de l'équation $z^4 + z^2 - i\sqrt{3} = 0$ est	$e^{i\frac{\pi}{6}}$	i	$e^{-i\frac{\pi}{6}}$
2	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+8}$. Une primitive de f est	$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right)$	$\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right)$	$\arctan(x+2)$
3	m est un nombre réel (m > 1). Si $J = \int_m^{m+1} \frac{1}{x}\,dx$, alors J appartient à l'intervalle	$[m\,;\,m+1]$	$\left]0;\frac{1}{m+1}\right[$	$\left[\frac{1}{m+1};\frac{1}{m}\right]$
4	z est un nombre complexe. Si $z = 1+\cos\theta + i\sin\theta$, avec $\pi < \theta < 2\pi$, alors $\lvert z \rvert =$	$2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$\sqrt{2}$

II- (2 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) d'équation x + z = 0

et la droite (d) d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = -2t \\ z = 3t+1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.



1) Calculer les coordonnées du point d'intersection A de (d) et (P).
2) Soit B(1 ; 0 ; 1) un point de (d).
   a- Montrer que O est le projeté orthogonal de B sur (P).
   b- Déduire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ), la projection orthogonale de (d) sur (P).
3) Soit J(–5 ; 2 ; 5) un point de (P).
   Calculer le volume du tétraèdre OBJA.
4) Dans le plan (P), on considère l'hyperbole (H) de foyers O et A et d'excentricité e = 3.
   a- Vérifier que le point I(1 ; 1 ; –1) est le centre de (H).
   b- Calculer les coordonnées des deux sommets S et G de (H).

III- (3 points)
On dispose de deux dés cubiques parfaits, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On lance les deux dés.
On désigne par X la variable aléatoire définie de la manière suivante :

- si les deux nombres apparus sur les deux dés sont différents, alors X est égale au plus grand d'entre eux.
- si les deux nombres apparus sur les deux dés sont égaux, alors X est égale à l'un d'eux.

Par exemple, – Si les deux numéros apparus sur les deux dés sont 2 et 3, alors X = 3 – Si les deux numéros apparus sur les deux dés sont 4 et 4, alors X = 4

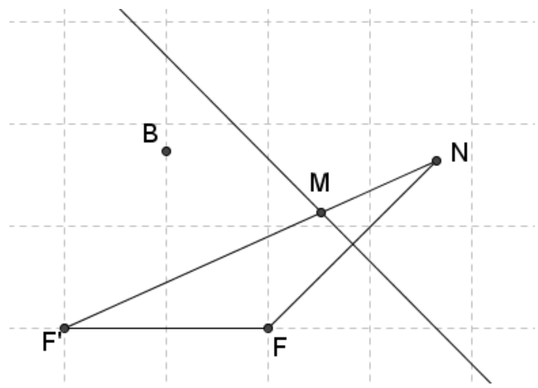
1) a- Calculer les probabilités $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
   b- Démontrer que $P(X \le 3) = \frac{1}{4}$.
2) Dans cette partie, on considère une urne U contenant 6 boules: 4 rouges et 2 bleues.
   On lance les deux dés :
   - si $X \le 3$, on tire simultanément et au hasard 3 boules de U
   - si $X > 3$, on tire successivement, au hasard et avec remise 3 boules de U.

   On considère les événements suivants :
   A: « $X \le 3$ »
   S: « Les trois boules tirées ont la même couleur »

   a- Calculer $P\left(S/A\right)$ et $P\left(A \cap S\right)$.
   b- Vérifier que $P\left(\overline{A} \cap S\right) = \frac{1}{4}$ et calculer $P(S)$.
   c- Sachant que $X > 3$, calculer la probabilité que les trois boules tirées n'aient pas la même couleur.

IV- (3 points)
Dans la figure ci-contre,

- F et F' sont deux points fixes tel que FF' = 2.
- N est un point variable sur le cercle de centre F' et de rayon 4.
- La médiatrice du [FN] coupe [F'N] en M.
- B est un point fixe tel que BF'F soit un triangle équilatéral.

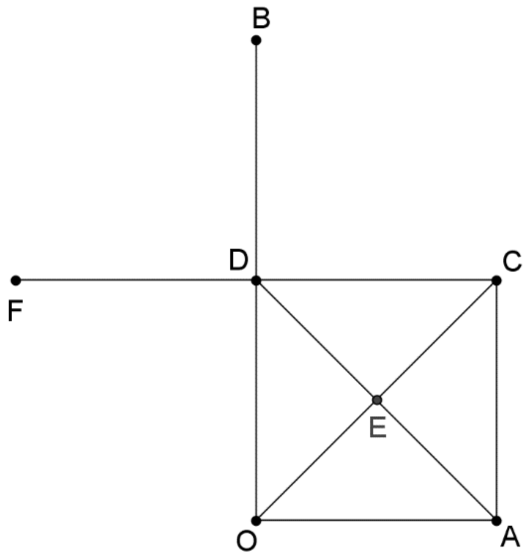


1) a- Montrer que MF + MF' = 4.
   b- Déduire que M varie sur une conique (E) dont on déterminera la nature, les foyers et le centre O.
2) Soit A le symétrique de O par rapport à F.
   a- Montrer que A est l'un des sommets de (E).
   b- Déterminer l'axe non focal de (E) et vérifier que B est l'un des sommets de (E).
   c- Tracer (E).
3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OF}$.
   a- Vérifier que $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ est une équation de (E).
   b- Ecrire une équation de la droite (d) directrice de (E) associée à F.
   c- Soit $L(\alpha; \beta)$ un point de (E) tel que α et β sont deux nombres réels avec $\beta \neq 0$.
   Ecrire une équation de la tangente (T) en L à (E).

V- (3 points)

Dans la figure ci-dessous,

- OACD est un carré direct de centre E et de côté 2 .
- F est le symétrique de C par rapport à D.
- B est le symétrique de O par rapport à D.



On désigne par S la similitude plane directe de centre O qui transforme A en B.

Partie A

1) a- Calculer le rapport k et un angle α de S.

   b- Vérifier que S(E) = F.

   c- Montrer que le triangle OBF est rectangle isocèle.

2) On considère la similitude plane directe $S'\left(E,\ 2,\frac{\pi}{2}\right)$ et la transformation h = S $\circ$ S'.

   On désigne par W le centre de h. Montrer que $\overrightarrow{WF} = -4\overrightarrow{WE}$.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ avec $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.$

1) Montrer que la forme complexe de h est $z' = -4z + 2 + 6i$ et déduire l'affixe de W.
2) Pour tout n $\in \mathbb{N}$, on considère la suite numérique (d_n) définie par :

   $d_n = WE_n$, où $E_0 = E$ et $E_{n+1} = h(E_n)$.

   a- Vérifier que $d_0 = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

   b- Montrer que (d_n) est une suite géométrique de raison 4.

   c- Déterminer le nombre de points E_n tel que $d_n < 2019$.

VI- (7 points)

Partie A

On considère l’équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ et soit $y = z + e^{2x}$.

1) Ecrire une équation différentielle (E') satisfaite par z.
2) Trouver la solution générale de (E).
3) Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormé, admet au point A(0 ; –2) une tangente parallèle à l’axe des abscisses.

Partie B

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = e^{2x} + (x-3)e^{x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).
3) Soit g la fonction définie sur ℝ par $g(x) = x - 2 + 2e^{x}$.
   a- Dresser le tableau de variations de la fonction g.
   b- Calculer $g(0)$ puis déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
4) Vérifier que $f'(x) = e^{x}g(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
5) Montrer que l’équation $f(x) = 0$ admet, sur ℝ, une racine unique α. Vérifier que $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$.
6) Tracer la courbe (C).
7) a- Montrer que f admet sur [0 ; + ∞[une fonction réciproque f^{-1} et déterminer son domaine de définition.
   b- Tracer la courbe (C') représentative de f^{-1} dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   c- Calculer, en fonction de α, l’aire du domaine délimité par (C'), l’axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

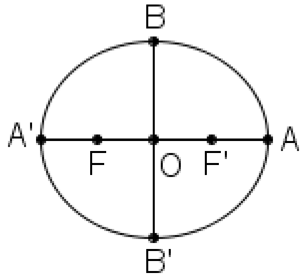
Partie C

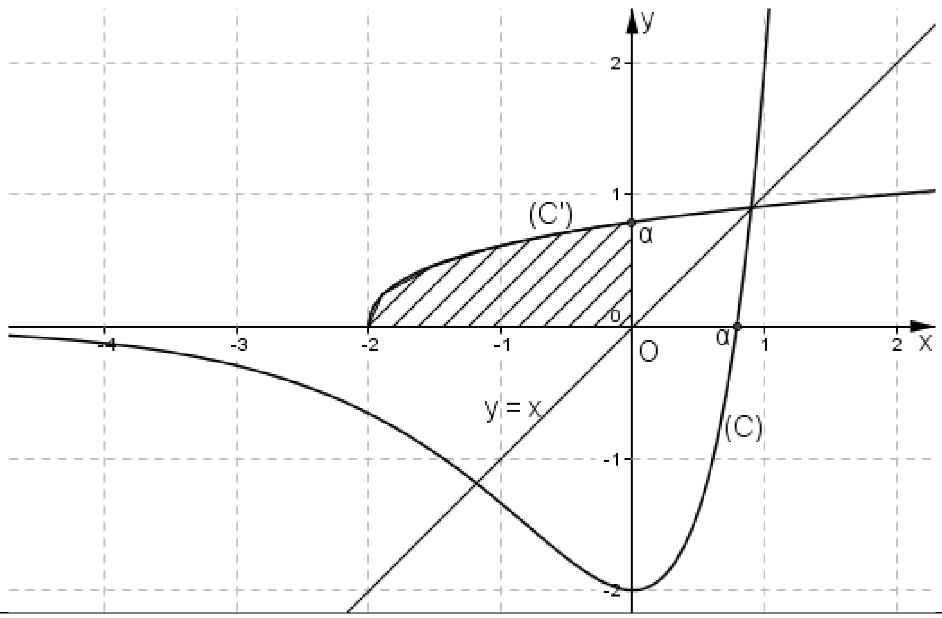
Soit h la fonction donnée par $h(x) = \arcsin\left(f^{-1}(x)\right)$.

Montrer que le domaine de définition de la fonction h est $[-2\ ;\ e^{2} - 2e]$.

أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

Q.I	Eléments de réponses	4pts
1	$z = e^{i\frac{\pi}{6}}$. **Donc a**	1
2	$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{1}{2^2+(x+2)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{x+2}{2})^2} = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x+2}{2}) + C$. **Donc a** **OU** on peut chercher la dérivée de $\frac{1}{2}\arctan(\frac{x+2}{2})$	1
3	$m \le x \le m+1$, $\frac{1}{m+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{m}$ donc $\frac{1}{m+1}\int_m^{m+1} dx \le \int_m^{m+1} \frac{1}{x}dx \le \frac{1}{m}\int_m^{m+1} dx$ donc $\frac{1}{m+1} \le J \le \frac{1}{m}$. **Donc c**	1
4	$z = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).i = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)[-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i.\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)] = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}$ $\left(\pi < \theta < 2\pi \text{ donc } \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \pi ;\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0\right)$ alors $\|z\| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. **Donc b** **OU** $\|z\| = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{4(\cos\frac{\theta}{2})^2} = \left\|2\cos(\frac{\theta}{2})\right\|$ $= -2\cos(\frac{\theta}{2})$ car $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \pi$. **OU** on peut prendre une valeur particulière qui vérifie une seule solution.	1
Q.II	**Eléments de réponses**	**4pts**
1	$A \in (d)$ donc $A(-t+1 ; -2t ; 3t+1)$ et $A \in (P)$, $x_A + z_A = 0$, $t = -1$ donc $A(2 ; 2 ; -2)$.	0,5
2a	O est un point de (P) et $\overrightarrow{OB}(1; 0; 1) = \overrightarrow{N_P}$	0,5
2b	$(\Delta) \equiv (OA)$: $\begin{cases} x = 2m \\ y = 2m \\ z = -2m \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$ **OU** $\begin{cases} x = 2m+2 \\ y = 2m+2 \\ z = -2m-2 \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$ **OU** $\begin{cases} x = m \\ y = m \\ z = -m \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$	0,5
3	$V_{OBJA} = \frac{1}{6}\left\|\det\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ}\right)\right\| = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$ unité de volume.	1
4a	Le centre de (H) est le milieu de [OA] donc I(1 ; 1 ; –1).	0,5
4b	$S \in (OA)$ donc $S(m ; m ; -m)$. $e = \frac{c}{a} = 3$ et $c = OI = \sqrt{3}$ donc $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $IS = a$ donc $3(m-1)^2 = \frac{1}{3}$ donc $m = \frac{4}{3}$ ou $m = \frac{2}{3}$ alors $S\left(\frac{4}{3} ; \frac{4}{3} ; -\frac{4}{3}\right)$ et $G\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; -\frac{2}{3}\right)$	1
Q.III	**Eléments de réponses**	**6pts**
1a	$P(X = 1) = \frac{1}{36}$; $P(X = 2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	1
1b	$P(X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$	1
2a	$P(S/A) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}$ $P(A \cap S) = P(A) \times P(S/A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$	1
2b	$P(\overline{A} \cap S) = P(\overline{A}) \times P(S/\overline{A}) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{4^3}{6^3} + \frac{2^3}{6^3}\right) = \frac{1}{4}$ $P(S) = P(\overline{A} \cap S) + P(A \cap S) = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10}$	1,5
2c	$P(\overline{S}/\overline{A}) = 1 - P(S/\overline{A}) = 1 - \frac{P(S \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$ **OU** $P(\overline{S}/\overline{A}) = \frac{P(\overline{S} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$	1,5

Q.IV	Eléments de réponses	6pts
1a	$MF + MF' = MN + MF' = 4$	**0,5**
1b	$MF + MF' = 4 = 2a$ égal une constant plus grand $FF' = 2$. Donc M varie sur une ellipse (E) des foyers F et F'. Le centre O est le milieu de [FF'].	**1**
2a	$AF + AF' = 1 + 3 = 4$ donc $A \in (E)$ et A est un point de l'axe focal (FF '). Donc A est un sommet principal de (E).	**0,5**
2b	l'axe non focal c'est la droite (OB) passant par O et perpendiculaire à l'axe focal (FF') $a = \frac{4}{2} = 2$, $c = \frac{FF'}{2} = 1$ et $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$ B est un point de l'axe non focal de (E). OBF est un triangle demi équilatérale et $OB = \frac{BF \times \sqrt{3}}{2} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ donc B est un sommet secondaire de (E). **OU** $BF + BF' = 4$ et B est un point de l'axe non focal de (E).	**1**
2c	Le deuxième sommet secondaire de (E) autre que B est le symétrique du point B par rapport au centre O. Le deuxième sommet principal de (E) autre que A est le symétrique du point A par rapport au centre O.  	**1**
3a	(E) est une ellipse de centre $O(0\,;0)$ et d'axe focal **(FF') ≡ (x'x)** donc (E) : $\frac{(x-0)^2}{2^2} + \frac{(y-0)^2}{\sqrt{3}^2} = 1$ par suite $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$	**1**
3b	$(d) : x = \frac{a^2}{c}$ donc $(d) : x = 4$	**0,5**
3c	$(T) : \frac{\alpha x}{4} + \frac{\beta y}{3} = 1$; $y = \frac{-3\alpha}{4\beta} x + \frac{3}{\beta}$	**0,5**
Q.V	**Eléments de réponses**	**6pts**
A1a	Le rapport $k = \frac{OB}{OA} = 2$ L'angle $\alpha = (\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB})(2\pi) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$	**1**
A1b	$\frac{OF}{OE} = 2 = k$ $(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\ (2\pi) = \frac{\pi}{2}(2\pi) = \alpha$ Alors S(E) = F.	**0,5**
A1c	S(OAE) = OBF et OAE est rectangle isocèle. Donc OBF est rectangle isocèle	**0,5**
A2	$h = sim(W, 4, \pi) = hom(W, -4)$. $h(E) = S(S'(E)) = S(E) = F$ donc $\overrightarrow{WF} = -4\overrightarrow{WE}$	**1**
B1	$z' = -4z + 2 + 6i$ $Z_W = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$	**1**
B2a	$d_0 = WE = \frac{\sqrt{10}}{5}$	**0,5**
B2b	$d_{n+1} = 4d_n$ Donc (d_n) est une suite géométrique de raison 4.	**0,5**
B2c	$d_n = d_0 \times 4^n = \frac{\sqrt{10}}{5} \times 4^n$ $d_n < 2019$; $\frac{\sqrt{10}}{5} \times 4^n < 2019$ donc $n < 5{,}8$ Alors n = 5 donc le nombre des points est 6.	**1**

<table>
<tr><th>Q.VI</th><th>Eléments de réponses</th><th>14pts</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>$z'' - 2z' + z = 0$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>$r^2 - 2r + 1 = 0$, $r = 1$, $z = (Ax + B)e^x$, $y = z + e^{2x} = (Ax + B)e^x + e^{2x}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>A3</td><td>$y(0) = -2$, $B = -3$;
$y' = Ae^x + (Ax + B)e^x + 2e^{2x}$, $y'(0) = 0$, $A = 1$. Alors $y = (x - 3)e^x + e^{2x}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B2</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $y = 0$ AH</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B3a</td><td>$g'(x) = 1 + 2e^x > 0$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>g'(x)</td><td>+</td></tr>
<tr><td>g(x)</td><td>$-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>B3b</td><td>$g(0) = 0$.
$g(x) < 0$ si $x < 0$, $g(x) = 0$ si $x = 0$, $g(x) > 0$ si $x > 0$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B4</td><td>$f'(x) = 2e^{2x} + e^x + (x - 3)e^x = e^x g(x)$.
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>f '(x)</td><td>–   0   +</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>0 ↘ –2 ↗ $+\infty$</td></tr>
</table></td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>B5</td><td>Sur $]-\infty ; 0[$ on a $f(x) < 0$ donc $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.
Sur $[0 ; +\infty[$ on a f est continue et strictement croissante et passe de $-2 < 0$ jusqu'à $+\infty$ donc $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
Puisque $f(0,7).f(0,8) = (-0,57)(0,05) < 0$ alors $0,7 < \alpha < 0,8$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>B6</td><td>
</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>B7a</td><td>Sur $[0 ; +\infty[$ on a f est continue et strictement croissante donc f admet une fonction réciproque f^{-1}. $D_{f^{-1}} = [-2 ; +\infty[$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>B7b</td><td>(C) et (C') sont symétriques par rapport à (y = x). Figure</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B7c</td><td>Aire = $\int_0^{\alpha} -f(x)dx = -\left[\frac{1}{2}e^{2x} + (x-3)e^x - e^x\right]_0^{\alpha} = \left[(4-\alpha)e^{\alpha} - \frac{1}{2}e^{2\alpha}\right] - \left[\frac{7}{2}\right]$ unité d'aire.
Remarque : $f(\alpha) = 0$, $e^{\alpha} = 3 - \alpha$. Donc Aire = $\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 4$ unité d'aire.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$-1 \le f^{-1}(x) \le 1$ et $f^{-1}(x) \ge 0$ donc $0 \le f^{-1}(x) \le 1$, $f(0) < x < f(1)$ car f est croissante donc $-2 \le x \le e^2 - 2e$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>