ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- [4 points]

Une usine fabrique un article. Le tableau suivant donne l'offre y de ce produit, en milliers des articles, en fonction du prix unitaire x en milliers de LL.

Prix x_i en milliers de LL	2	3	5	7	10
Offre y_i en milliers des articles	5	7	8	9	11

Le modèle reste valable pour un prix de 20 000 LL

1) Déterminer une équation de la droite de régression $(D_{y/x})$.
2) Estimer l'offre des articles pour un prix unitaire de 15 000 LL.
3) La demande est modalisée par la droite $(D_{z/x})$ d'équation z = -0,567x + 8,266.
   Les deux droites $(D_{y/x})$ et $(D_{z/x})$ se coupent en un point I(3,158 ; 6,474).
   Donner une interprétation économique aux coordonnées de ce point.
4) Calculer, en LL, le revenu assuré sous le prix unitaire de 7000 L.L.
5) Soit e(x) l'élasticité de la demande par rapport au prix unitaire x.
   a) Montrer que l'élasticité de la demande est donnée par $e(x) = \dfrac{-567x}{-567x + 8266}$.
   b) Calculer e(4). Interpréter économiquement la valeur ainsi obtenue.

II- [4 points]

Partie A

Nisrine dépose 4 000 000 L.L dans une banque à un taux d'intérêt annuel de 0,5% capitalisé annuellement. Après la capitalisation des intérêts, Nisrine ajoute, annuellement, une somme de 200 000 LL à son compte.

Soit V_n le compte de Nisrine, en millions de L.L, après n années (n est un entier naturel). Ainsi $V_0 = 4$.

1) Justifier, pour tout entier naturel n, que $V_{n+1} = 1{,}005V_n + 0{,}2$.
2) Soit (W_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $W_n = V_n + \alpha$.
   a) Calculer α si (W_n) est une suite géométrique de raison 1,005.
   b) Prends $\alpha = 40$. Exprimer W_n en fonction de n et déduire que $V_n = 44(1{,}005)^n - 40$.
3) a) Calculer le compte de Nisrine après dix ans.
   b) Calculer le montant d'intérêt gagné par Nisrine durant ces dix années.
4) Montrer que (V_n) est une suite strictement croissante.

Partie B

À la même date où Nisrine a déposé la somme de 4 000 000 LL, Nadia a investi 8 000 000 LL dans la même banque suivant la règle : $U_{n+1} = 1{,}005U_n$, où U_n est le compte de Nadia, en millions de L.L, après n années (n est un entier naturel). Alors $U_0 = 8$.

1) Montrer que (U_n) est une suite géométrique et que $U_n = 8(1{,}005)^n$.
2) On admet que (U_n) est encore une suite strictement croissante.
   Après combien d'années le compte de Nisrine dépassera celui de Nadia pour la première fois ?

III- [4 points]
Une urne U contient 4 boules blanches, 5 boules rouges et 3 boules vertes.

Partie A
On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne U.

1) Calculer la probabilité de tirer trois boules de même couleur.
2) Montrer que la probabilité de tirer au moins une boule verte et au moins une boule rouge parmi les trois boules tirées est $\frac{21}{44}$.

Partie B
Un joueur paie une somme de 10 000 LL pour participer dans un jeu.
Le jeu se déroule comme le suivant:
Le joueur tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne U.

- Si au plus l'une des deux boules tirées est vertes, le joueur reçoit une somme de 5 000 LL et le jeu s'arrête.
- Si les deux boules tirées sont vertes, elles sont remises à l'extérieur de l'urne U et le joueur reçoit une somme de 8 000 LL.
  Après-ça, deux boules sont tirées simultanément et au hasard parmi les 10 boules restantes dans l'urne U.
  - Si ces deux boules tirées sont de même couleur, le joueur reçoit une somme de 12 000 LL et le jeu s'arrête ;
  - Si non, le joueur reçoit une somme de 2 000 LL et le jeu s'arrête.

Soit X la variable aléatoire égal au gain algébrique du joueur (Le gain algébrique peut-être nul, positif ou négatif).

1) Justifier que les valeurs de X sont : -5 000 ; 0 et 10 000.
2) Montrer que $P(X = 0) = \frac{29}{990}$.
3) Déterminer la loi de probabilité de X.
4) Attendez-vous que ce joueur va gagner ? Justifier.

IV- [8 points]
Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = (-2x-1)e^{-x} + 2$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Déduire une équation d'une asymptote a (C).
2) Montrer que $f'(x) = (2x-1)e^{-x}$ et construire le tableau de variations de f.
3) Tracer (C) et son asymptote.
4) La droite (d) d'équation $y = \frac{x}{2}$ coupe la courbe (C) en un seul point d'abscisse α.
   Vérifier que 3,5 < α < 3,6.
5) Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = (2x+3)e^{-x} + 2x$.
   a) Montrer que F est une primitive de f.
   b) Déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

Partie B

Dans ce qui suit on suppose que $\alpha = 3{,}55$

Une usine fabrique de souvenirs. Le coût total de production de souvenirs C_T, en millions de LL, est modalisé par $C_T(x) = f(x)$ **seulement** pour tout x dans [0,5 ; 4], où x, en milliers représente le nombre de souvenirs produits. ($0{,}5 \leq x \leq 4$).

1) Calculer, en L.L, le coût de production de 3 000 souvenirs. En déduire, dans ce cas, le coût moyen de production d'un souvenir.
2) Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction du profit P de cette usine, en millions LL, sur [0,5 ; 4].

x	0,5		0,844		4
$P'(x)$			+		
$P(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2,164

   a) Etudier si l'usine peut assurer un gain égal à 3 000 000 L.L.
   b) Déterminer le nombre minimal de souvenirs à vendre pour que l'usine réalise un gain.
   c) La fonction de profit P est définie sur [0,5 ; 4] par $P(x) = x - 2 + (2x+1)e^{-x}$.
   Montrer que la fonction de revenu R, en millions LL, est modalisée par R(x) = x sachant que toute la production est vendue.
   d) Calculer le nombre des souvenirs à vendre pour que le revenu soit le double du coût total de production.

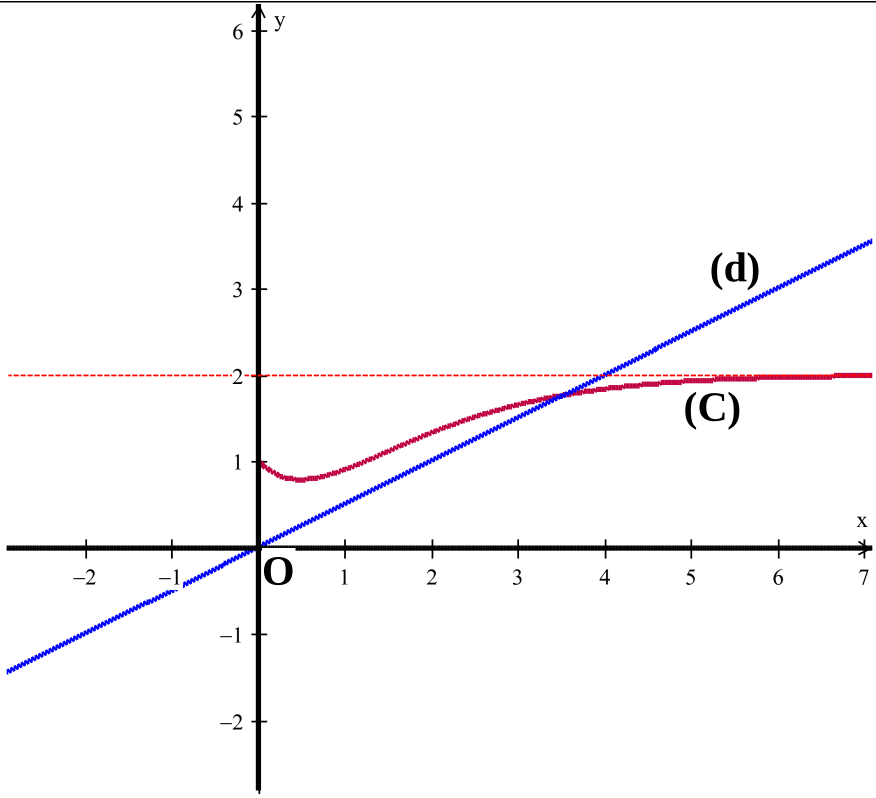
أسس التصحيح

QI	Réponses	Notes
1	$(D_{y/x})$: y = 0,679x + 4,330	0,5
2	Offre = 0,679(15) + 4,330 = 14, 515 en milliers des articles alors c'est 14515 articles	1,5
3	Le prix d'équilibre est 3158 L.L et la quantité d'équilibre est 6474 articles.	0,75 0,75
4	Revenu = (7)(-0,567(7) + 8,266)(1000) = 30079 L.L	1,5
5a	$e(x) = x.\frac{z'}{z} = \frac{-567x}{-567x + 8266}$	1
5b	e(4) = -0,378 A partir de 4000 LL si le prix augmente de 1% la demande diminue de 0,378%	0,25 0,75

QII	Réponses	Notes
A1	$V_{n+1} = (1+0,5/100)V_n + 200000/1000000 = 1,005V_n + 0,2$	0,5
A2a	$W_{n+1} = 1,005W_n$; α = 40	1
A2b	$W_n = 44(1,005)^n$; $V_n = 44(1,005)^n - 40$	0,25 0,25
A3a	$V_{10} = 6.250165$ donc c'est 6250165 L.L	1
A3b	I = 6 250 165 – (4 000 000+200 000x10)= 250 165 LL	0,5
A4	$V_{n+1} - V_n = 44(1,005)^{n+1} - 44(1,005)^n = 44(1,005)^n(1,005-1)$ $= 0,22(1,005)^n > 0$ alors (V_n) est une suite strictement croissante	1,5
B1	La raison commune est 1,005 ; $U_n = U_0 \times q^n = 8(1.005)^n$	0,25 0,25
B2	$V_n > U_n$ donne n > 21,12 alors n = 22. Donc c'est après 22 ans.	1,5

QIII	Réponses	Notes
A1	$P(\text{BBB ou RRR ou VVV}) = \dfrac{A_4^3 + A_5^3 + A_3^3}{A_{12}^3} = \dfrac{3}{44}$	1
A2	$(2V \text{ et } 1R) \text{ ou } (1V \text{ et } 2R) \text{ ou } (1V, 1R \text{ et } 1B)$ avec $(2V \text{ et } 1R)$ peut-être écrit comme $\dfrac{3!}{2!} = 3$ façons: VVR, VRV, RVV et de même pour (2R et 1V), en plus comme $(1V, 1R \text{ et } 1B)$ peut-être écrit en $3!$ façons, alors : $P = \dfrac{A_3^2 \times A_5^1 \times 3 + A_3^1 \times A_5^2 \times 3 + A_3^1 \times A_5^1 \times A_4^1 \times 3!}{A_{12}^3} = \dfrac{21}{44}$	1,5
B1	5000 – 10000 = -5000; toutes les deux premières boules tirées ne sont pas vertes et le jeu s'arrête. 8000 + 2000 – 10000 = 0; les 2 premières boules tirées sont vertes et les 2 deuxièmes boules tirées sont des couleurs différents. 8000 + 12000 – 10000 = 10000 ; les 2 premières boules tirées sont vertes et les 2 deuxièmes boules tirées sont de même couleur.	1
B2	$P(X=0) = \dfrac{C_3^2}{C_{12}^2} \times \left(1 - \dfrac{C_4^2 + C_5^2}{C_{10}^2}\right) = \dfrac{29}{990}$. Les 2 premières boules tirées sont vertes $\dfrac{C_3^2}{C_{12}^2}$ et les 2 deuxièmes boules tirées des 10 sont des couleurs différents (RV, RB, BV) $\dfrac{C_5^1 C_1^1 + C_5^1 C_4^1 + C_4^1 C_1^1}{C_{10}^2} = \left(1 - \dfrac{C_4^2 + C_5^2}{C_{10}^2}\right)$ "opposé des 2 boules de même couleur "	1
B3	$P(X = -5000) = 1 - \dfrac{C_3^2}{C_{12}^2} = \dfrac{21}{22}$ $P(X = 10000) = \dfrac{C_3^2}{C_{12}^2} \times \dfrac{C_4^2 + C_5^2}{C_{10}^2} = \dfrac{8}{495}$ et $P(X=0) = \dfrac{29}{990}$	2
B4	EX = 0 + (-5000)(21/22) + (10000)(8/495) = -4611,11 < 0 On s'attend donc à ce que le joueur de perde.	0,5

QIV	Réponses	Notes
A1	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2xe^{-x} - e^{-x} + 2) = 2$; y = 2 AH	1
A2	$f'(x) = (-2 + 2x + 1)e^{-x} = (2x-1)e^{-x}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1/2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 1 & \searrow & 0,786 & \nearrow & +\infty \end{array}$	2

A3		1,5
A4	f(3,5) = 1,758 > 3,5/2 f(3,6) = 1,775 < 3,5/2 alors 3,5 < α < 3,6	1
A5a	$F'(x) = (2 - 2x - 3)e^{-x} + 2 = (-2x - 1)e^{-x} + 2 = f(x)$	1
A5b	$\text{Aire} = \int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = 5e^{-1} - 1 = 0.839\ u^2$	1,5
B1	$C_T(3)$ = 1,651490 LL ; donc c'est 1 651 490 LL coût moyen de production d'un souvenir = 1651490/3000 ≈ 550,5 LL	2
B2a	Suivant la tableau de variations de la fonction du profit : 2164000 < 3000000 donc non	0,5
B2b	P(0,844) = 0 et P strictement croissante. Pour la production of 845 souvenirs	1,5
B2c	R(x) = P(x) + C(x) = x	0,5
B2d	R(x) = 2C(x) donne f(x) = x/2 donc x = α, alors 3550 souvenirs	1,5