المادة: رياضيات – لغة فرنسية الشهادة: المتوسطة نموذج رقم: ١ / ٢٠١٩ المدّة: ساعتان	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم: الرياضيات	المركز التربوي للبحوث والإنماء

ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (2 points)

Toutes les étapes de calcul doivent être présentes.

On donne les trois points distincts A, P et N tels que :

$$AN = 3 - \frac{1}{5} \times \frac{10}{3} - \frac{1}{3} \quad ; \quad NP = \frac{4}{5-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{et} \quad AP = \frac{2 \times 10^8 + 10^7}{7 \times 10^4 \times 10^3}$$

1) Montrer que AN, NP et AP sont des entiers naturels.
2) Vérifier que les points A, N et P sont alignés.

II- (3 points)

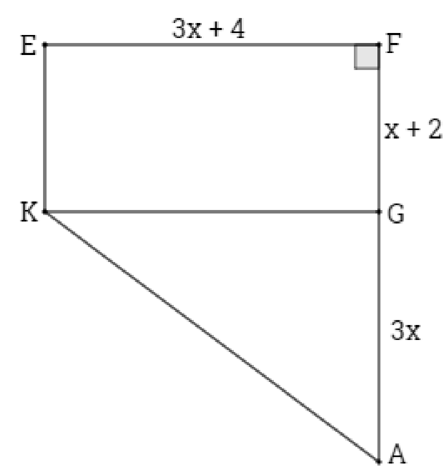
Dans une école, il y a deux sections d'EB9, section A et section B.

1) Dans la section A de la classe EB9, 40% des élèves sont des garçons.
   On désigne par x le nombre de filles et par y celui des garçons.
   a. Montrer que $2x = 3y$.
   b. On sait que $x = y + 5$. Ecrire une phrase qui décrit la relation entre x et y.
   c. Utiliser les parties **a.** et **b.** pour calculer le nombre de filles et le nombre de garçons de la section A.
2) Dans section B de la classe EB9, $\frac{4}{9}$ des élèves sont des filles, tandis que, le nombre de garçons de la section B est égale à 10.
   Calculer le nombre de filles de la section B.

III- (4 points)

Dans la figure ci-contre, on a :

- EFGK est un rectangle
- $EF = 3x + 4$ et $FG = x + 2$ où x est un nombre réel positif.
- Les points F, G et A sont alignés tels que $AG = 3x$.



On désigne par S_1 l'aire du rectangle EFGK et par S_2 l'aire du triangle KFA.

1) **a.** Calculer S_1 et S_2 en fonction de x.
   b. Montrer que $S_2 - S_1 = (3x + 4)(x - 1)$.
   c. Calculer x sachant que $S_2 = S_1$.
   Dans ce cas, que représente la droite (KG) pour le segment [FA] ?
2) **a.** Calculer KA^2 en fonction de x.
   b. Vérifier que $3x^2 + 4x - 4 = (3x - 2)(x + 2)$.
   c. Déterminer x sachant que $KA = 2\sqrt{10}$.

IV- (5 points)

Dans un repère orthonormé d'axes x'Ox et y'Oy, on donne la droite (d) d'équation $y = x + 5$ et le point $A(-3\ ;\ 2)$.

1) **a.** Vérifier que A est un point de la droite (d).

b. Soit B le point d'intersection de (d) avec l'axe y'Oy. Calculer les coordonnées de B.

c. Placer les points A et B. Tracer la droite (d).

2) Soit (d') la droite qui passe par B et perpendiculaire à (d).

a. Écrire une équation de la droite (d').

b. Vérifier que le point $E(5\ ;\ 0)$ est le point d'intersection de la droite (d') et l'axe x'Ox.

c. Tracer (d').

3) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABE.

a. Calculer les coordonnées du point I, le centre de (C), et vérifier que son rayon est égal à $\sqrt{17}$.

b. Vérifier que le point F (0 ; –3) est sur le cercle (C).

c. Montrer que le triangle AFE est rectangle isocèle.

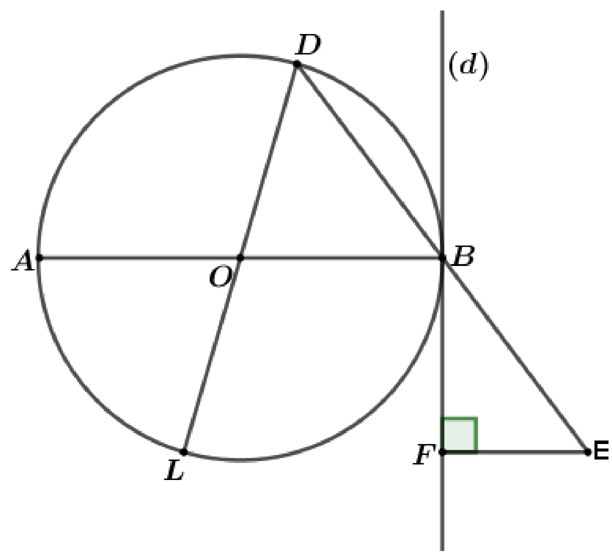
4) Soit L le translaté de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FI}$. Déterminer les coordonnées de L.

5) Soit G le quatrième sommet du parallélogramme IELG. Montrer que G se trouve sur le cercle (C).

V- (6 points)

Dans la figure ci-contre, on a :

- (C) est un cercle de diamètre [AB] tel que AB = 10.
- D est un point de (C) tel que DB = 6.
- [DL] est un diamètre de (C).
- (*d*) est la tangente à (C) en B.
- E est le symétrique de D par rapport à B.
- F est la projection orthogonale de E sur (*d*).



1) Trace la figure.

2) Calculer AD.

3) **a.** Montrer que les deux triangles ABD et BEF sont semblables puis écrire le rapport de similitude.

b. Calculer FE et vérifier que FB = 4,8.

4) Soit G le point d'intersection de (*d*) et (AD).

Montrer que les points D, G, F et E se trouvent sur un même cercle (C′), dont on déterminera un diamètre.

5) Soit I le centre du cercle (C′).

a. Montrer que les deux droites (IB) et (DG) sont parallèles.

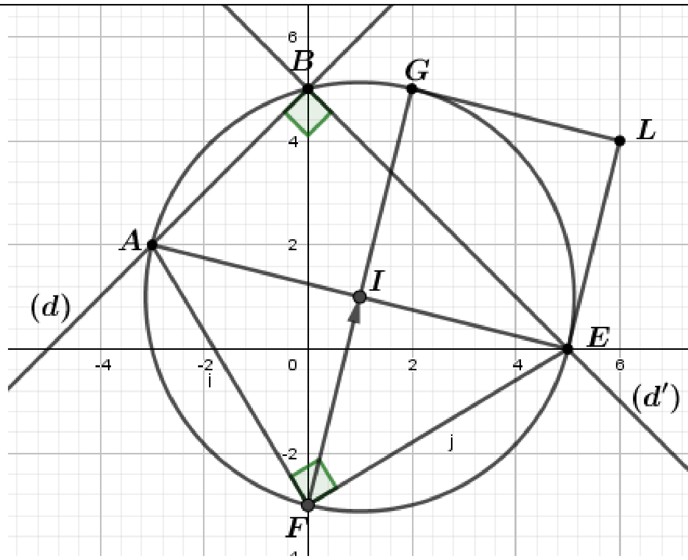
b. Montrer que les points L, B et I sont alignés.

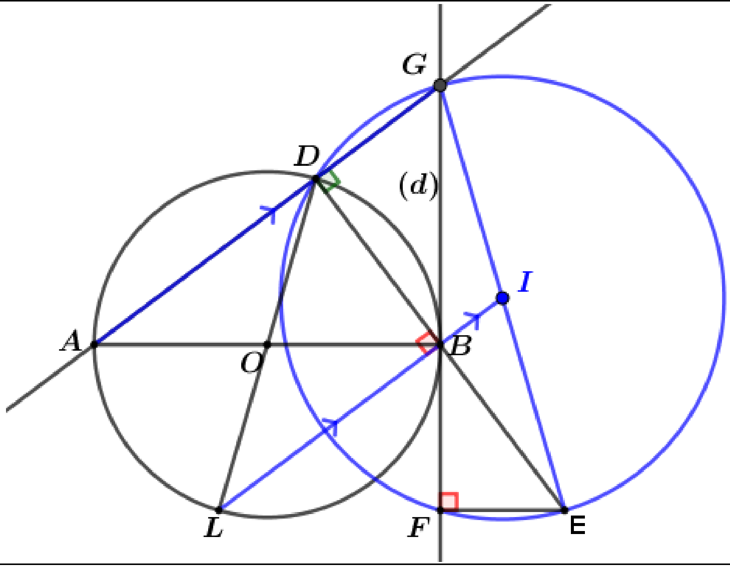
6) **a.** Calculer $\tan \widehat{BAD}$, en déduire que BG =7,5.

b. Calculer le rayon du cercle (C′).

أسس التصحيح

	Question I (2 points)	Note
1	$AN = 3 - \frac{1}{5} \times \frac{10}{3} - \frac{1}{3} = 3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 2.$ $NP = \frac{4}{5-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5-\sqrt{5}} \times \frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{20+4\sqrt{5}}{20} - \frac{\sqrt{5}}{5} = 1.$ $AP = \frac{2\times10^8+10^7}{7\times10^4\times10^3} = \frac{2\times10^8+10^7}{7\times10^7} = \frac{10^7(2\times10+1)}{7\times10^7} = \frac{21}{7} = 3.$	**1,5**
2	AP = AN + NP, donc les points A, N et P sont alignés.	**0,5**
	Question II (3 points)	
1.a	$\frac{y}{40} = \frac{x}{60}$ then $2x = 3y$. **Ou** $\frac{40}{100}(x+y) = y$, $\frac{40}{100}x - \frac{60}{100}y = 0$, alors $2x - 3y = 0$.	**0,75**
1.b	Dans la classe EB9, section A, le nombre de filles est égale au nombre de garcons plus 5…	**0,75**
1.c	x et y sont les solutions du système $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x - y = 5 \end{cases}$ D'après la partie 1) le nombre de filles est 15 et le nombre de garçons est 10.	**0,75**
2	Dans la section B, le nombre de garçons est 10, soit n le nombre de filles. Donc, $\frac{4}{9}(n+10) = n$. Alors, dans la section B, le nombre de filles est 8.	**0,75**
	Question III (4 points)	
1.a	$S_1 = L \times l = (3x+4)(x+2)$ $S_2 = \frac{h\times b}{2} = \frac{(3x+4)(3x+x+2)}{2} = \frac{(3x+4)(4x+2)}{2} = (3x+4)(2x+1)$	**1**
1.b	$S_2 - S_1 = (3x+4)(2x+1) - (3x+4)(x+2) = (3x+4)(x-1)$	**0,5**
1.c	$S_2 = S_1$, alors $S_2 - S_1 = 0$, $(3x+4)(x-1) = 0$, $x = -\frac{4}{3}$ (à rejeter) ou $x = 1$ (acceptable). Pour $x = 1$, FG = GA = 3 et puisque G, F et A sont alignés alors G est le milieu de [FA]. Mais (KG) est perpendiculaire à [FA] en G, alors (KG) est la médiatrice de [FA].	**1**
2.a	Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle KGA donne : $KA^2 = KG^2 + GA^2 = (3x+4)^2 + 9x^2 = 18x^2 + 24x + 16.$	**0,5**
2.b	$3x^2 + 4x - 4 = (3x-2)(x+2).$	**0,5**
2.c	$KA^2 = 40$, $18x^2 + 24x + 16 = 40$, $18x^2 + 24x - 24 = 0$, $6(3x^2 + 4x - 4) = 0$. Or $3x^2 + 4x - 4 = (3x-2)(x+2)$ (d'après (**2.b**)) donc $= (3x-2)(x+2) = 0$, alors $x = \frac{2}{3}$ (acceptable) ou $x = -2$ (à rejeter).	**0,5**

Question IV (5 points)		
1.a	A est un point de (d) car $y_A = x_A + 5$.	**0,25**
1.b	B est l'intersection de (d) avec l'axe y'Oy donc $x_B = 0$ et $y_B = 5$	**0,25**
1.c		**0,5**
2.a	(d') est perpendiculaire à (d) donc pente de (d) $\times$ pente de $(d') = -1$. Alors une équation de (d') est $y = -x + b$. Mais (d') passe par $B(0\ ;\ 5)$ donc b = 5. Alors une équation de la droite (d') est $y = -x + 5$.	**0,5**
2.b	E est un point de (d') car $y_E = -x_E + 5$ et E est encore un point de l'axe x'Ox car $y_E = 0$	**0,5**
2.c	Figure.	**0.25**
3.a	I est le milieu de [AE], donc $x_I = \frac{x_A+x_E}{2} = 1$ et $y_I = \frac{y_A+y_E}{2} = 1$, donc I(1 ; 1). Rayon du cercle (C) : $r = \frac{AE}{2} = \frac{\sqrt{(x_A-x_E)^2+(y_A-y_E)^2}}{2} = \sqrt{17}$.	**0.75**
3.b	$IF = \sqrt{17} = r$.	**0,25**
3.c	F est sur le cercle et [AE] est un diamètre, donc $\widehat{AFE} = 90°$ et $AF = FE = \sqrt{34}$, donc AFE est un triangle rectangle isocèle en F.	**0,75**
4	$\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{EL}$ donc $x_L - x_E = x_I - x_F$ alors $x_L = 6$ de même $y_L = 4$ donc $L(6\ ;\ 4)$.	**0,5**
5	$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{FI}$, donc IG = IF = r alors G se trouve sur le cercle (C).	**0,5**

Question V (6 points)		
1		0,5
2	$A\widehat{D}B$ est un angle inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AB]. D'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = AD^2 + BD^2$, donc $AD = 8$.	0,5
3.a	Dans les deux triangles rectangles ADB et EBF : (AB) et (EF)sont parallèles, alors $D\widehat{B}A = B\widehat{E}F$ (angles correspondants). Donc ADB et EBF sont semblables par deux angles égaux. Le rapport de similitude est : $\frac{ABD}{BEF}\Big\vert \frac{AB}{BE} = \frac{10}{6} = \frac{AD}{BF} = \frac{BD}{EF}$ car E est le symétrique de D par rapport à B, alors $BE = DB = 6$.	1
3.b	D'après le rapport de similitude : $\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{FE}$ donc $FE = \frac{BD \times BE}{AB} = \frac{6 \times 6}{10} = 3{,}6$. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BEF : $BE^2 = FB^2 + FE^2$ donc $FB = 4{,}8$.	1
4	$E\widehat{D}G = 90°$ et $G\widehat{F}E = 90°$, donc D, G, F et E appartiennent au même cercle (C') de diamètre [GE] .	0,5
5.a	Les deux droites (IB) et (DG) sont parallèles (théorème des milieux dans le triangle DGE).	0,5
5.b	$L\widehat{B}D = 90°$ (angle inscrit dans le demi-cercle de diamètre [LD]) et $G\widehat{D}B = 90°$ (facile à montrer), alors (LB) et (DG) sont parallèles (deux perpendiculaires à une même 3ème sont parallèles). (LB) parallèle à (DG) et (IB) parallèle à (DG), alors L, B et I sont alignés.	0,5
6.a	Dans le triangle ABD : $\tan B\widehat{A}D = \frac{BD}{AD} = \frac{6}{8} = 0{,}75$ Dans le triangle ABG : $\tan B\widehat{A}D = \frac{BG}{AB} = \frac{BG}{10}$ Par comparaison : $\frac{BG}{10} = 0{,}75$ c.à.d $BG = 7{,}5$.	0,75
6.b	Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle GFE : $GE^2 = GF^2 + FE^2$, donc $GE = \frac{3\sqrt{73}}{2}$ et le rayon du cercle (C') : $r' = \frac{GE}{2} = \frac{3\sqrt{73}}{4}$	0,75