المادة: الرياضيات – لغة فرنسية الشهادة: الثانوية العامة الفرع: العلوم العامة نموذج رقم: 1/ 2019 المدّة: اربع ساعات	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم: الرياضيات	المركز التربوي للبحوث والإنماء

ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (1.5 point)

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.

1) Si z est un nombre complexe tel que $z = re^{i\theta}$ où $r > 0$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $z' = \frac{-\bar{z}^2}{isin\theta cos\theta}$, alors $\frac{\pi}{2} + \theta$ est un argument de z'.
2) Si un nombre complexe $z \neq -i$ est tel que $\left|\frac{2z-4i}{\bar{z}-i}\right| = 2$, alors z est réel.
3) L'ensemble des solutions de l'inéquation $ln(e^{-2x} - 2e^{-x} + 1) \leq 0$ est $[-ln2\,;\,+\infty[$.
4) Si g est une fonction définie par $g(x) = ln\,x$ et f est une autre fonction tel que $D_f =]-\infty, 1[$, alors le domaine de définition de la fonction fog est $]0, e[$.
5) Si $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$, alors $I_{n+1} = e - (n+1)\,I_n$.

II- (2.5 point)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $E(1,-1,2)$, $F(0,-6,0)$, et $L(3,-1,1)$ et la droite (d) d'équations $\begin{cases} x = 2m+1 \\ y = -1 \\ z = -m+2 \end{cases}$ où m est un parametre réel.

Soit (P) le plan déterminé par O et (d), et soit (Δ) la droite passant par F et parallèle à (d).

1) a- Vérifier que E et L sont deux points de (d).

   b-Vérifier que $x + 5y + 2z = 0$ est une équation de (P).

2) Ecrire un système des équations paramétriques de (Δ).
3) On désigne par (Q) le plan déterminé par (d) et (Δ).

   a-Calculer $\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{FL}$, puis déduire un vecteur normal à (Q).

   b-Vérifier que (P) et (Q) sont perpendiculaires.

   c- Montrer que F est le projeté orthogonal de E sur (Δ).

4) On considère dans le plan (Q) la parabole (C) de foyer F et directrice (d).

   Déterminer les coordonnées de A et B, les points d'intersection de (C) et (Δ).

5) Montrer que le volume du tétraèdre $AOEL$ est égal au volume du tétraèdre $FOEL$, puis calculer ce volume.

III-(2 point)

On considère deux urnes:

Urne U contient 10 cartes : 3 marquées par la lettre A; 5 marquées par la lettre B; et 2 marquées par la lettre C.

Urne V contient 6 boules : 2 rouges et 4 vertes.

Partie A

Un joueur joue un jeu comme le suivant:

Le joueur commence le jeu par tirer une carte de l'urne U.

- Si cette carte est marquée A, alors il tire deux boules de l'urne V l'une après l'autre avec remise
- Si cette carte est marquée B, alors il tire deux boules de V l'une après l'autre sans remise
- Si cette carte est marquée C, alors on ajoute une boule rouge à l'urne V, puis le joueur tire deux boules simultanément de V.

Le joueur gagne le jeu s'il tire deux boules rouges de l'urne V.

On considère les évènements:

A: La carte tirée de U est marquée A.

B: La carte tirée de U est marquée B.

C: La carte tirée de U est marquée C.

G: Le joueur gagne le jeu.

1) Calculer $P({}^{G}/_{A})$. Déduire que $P(G \cap A) = \frac{1}{30}$.
2) Montrer que $P(G \cap C) = \frac{1}{35}$.
3) Montrer que $P(G) = \frac{2}{21}$.
4) Sachant que le joueur a perdu le jeu, calculer la probabilité qu'il a tiré une carte marquée A ou B de U.

Partie B.

Dans cette partie, on considère l'urne V seulement.

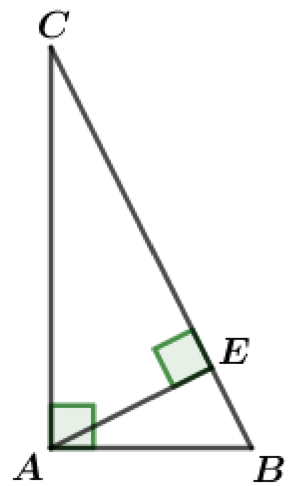
On ajoute n boules rouges à V (n $\geq$ 1), puis on tire deux boules simultanément de l'urne V.

On considère l'évènement D : les deux boules tirées sont de couleurs différents.

1) Montrer que $P(D) = \frac{8(n+2)}{n^2+11n+30}$.
2) Peut-on calculer n pour que la probabilité de tirer deux boules de même couleur soit égale à celle de tirer deux boules de couleurs différents ? Justifier.

IV-(4 points)

Dans la figure ci-contre,



- *ABC* est un triangle rectangle en *A*
- *AB* =2, *AC* = 4
- [*AE*] est une hauteur du triangle *ABC*
- *S* est la similitude qui transforme *A* en *B* et *E* en *C*

Partie A.

1) Déterminer un angle de *S* est montrer que son rapport est $\frac{5}{2}$.
2) Soit *F = S(B)* et *L = S(C).*
   a-Construire F.
   b-Montrer que *L* est le point d'intersection de (*CF*) et (*AB*).
3) a-Construire *(d) = S(AF),* puis déterminer *S*(*d*).
   b-Déduire que le centre *I* de *S* est le point d'intersection de (*d*) et (*AF*).
4) Soit h l'homothétie qui transforme *F* en *A* et *B* en *C*.
   a-Déterminer le centre *J* de *h*, puis vérifier que le rapport de *h* est $-\frac{4}{5}$.
   b-Construire *G = h(L).*
5) a-Déterminer la nature de *Soh*.
   b-Montrer que *C* est le centre de *Soh*.
   c-Déduire que *E* est le centre de *hoS*.

Partie B

Le plan complexe est rapporté au système $(A; \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

1) a-Ecrire la forme complexe de *hoS*.
   b-Déduire z_E.
2) Déterminer *hoS(C)*, puis chercher z_G.
3) Déterminer la nature du quadrilatère *LAGC*.

V-(4 points)

Dans le plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M, M', I et B tels que $z_M = z,\ z_{M'} = z',\ z_I = 1, z_B = -1$ et tel que $z' = z^2 - 2z$.

1) a) Vérifier que: $(z' + 1) = (z - 1)^2$.
   b) Si *M* varie sur un cercle *(C)* de centre I et rayon IB, montrer que *M'* varie sur un cercle *(C')* de centre et rayon à déterminer.
2) Soit $z = x + iy$ and $z' = x' + iy'$; *x, y, x' et y'* sont des réels.
   a-Montrer que $x' = x^2 - y^2 - 2x$ et $y' = 2y\,(x - 1)$.
   b-Déterminer une relation entre *x* et *y* si *z'* est imaginaire pur.
3) a- Si *z'* est imaginaire pur, montrer que *M* varie sur une hyperbole équilatère (*H*) de centre *I*.
   b-Déterminer les sommets et les asymptotes de (*H*).
   c-Tracer (*H*).
4) On considère les deux points *L* et *G* tels que: $z_L = i\sqrt{3}$ et $z_G = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a- Montrer que z_L et z_G vérifient la relation $z_L + 1 = (z_G - 1)^2$.
   b- Déduire que *G* est sur (*H*).
   c- Montrer que la tangente en *G* à (*H*) est parallèle à (*BL*).

5) Soit (E) une ellipse de sommets O, $A(2,0)$ et $K(1,3)$.
   a-Ecrire une équation de (E).
   b-Montrer que (E) est tangente à (BL) en J tel que $x_J = \frac{1}{2}$.
6) Les droites (BL) et (IK) se coupent en P.
   Calculer l'aire de la région située à l'intérieure du triangle (BIP) et à l'extérieure de (E).

VI-(6 points)

Partie A.
Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x + \ln x - 1$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.
   b- Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.
2) Calculer $g(1)$, puis discuter suivant x le signe de $g(x)$.

Partie B.
Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Déduire une asymptote à (C).

   b- Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a-Montrer que $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$, puis dresser le tableau de variations de f.

   b-Tracer (C).

3) a- Pour tout $x \in]0,1]$, Montrer que f admet une fonction réciproque h.

   b-Déterminer le domaine de h, puis tracer la courbe (C') de h dans le même repère que (C).

4) Soit A l'aire du domaine limité par (C'), $y'y$ et la droite (d) d'équation $y = \alpha$ où $0 < \alpha < 1$. Déterminer α si $A = (\alpha - \alpha \ln \alpha)$ unités d'aire.
5) Soit p la fonction définie par $p(x) = \ln\big(\alpha - h(x)\big)$ avec $\alpha = e^{-\sqrt{2}}$.

   a-Montrer que le domaine de définition de p est $]-\infty; \sqrt{2}(1 - e^{\sqrt{2}})[$.

   b-Déterminer les limites de p aux bornes de son domaine de définition.

Partie C.
Soit (U_n) la suite définie par $U_n = e^{f(n)}$; $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$.

1) a-Montrer que (U_n) est strictement décroissante.

   b- Vérifier que (U_n) est strictement minorée par un réel à déterminer.

   c- Déduire que (U_n) est convergente, puis calculer sa limite.
2) Montre que $U_n = n^{\frac{1-n}{n}}$.

المركز التربوي للبحوث والإنماء	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم: الرياضيات	المادة: الرياضيات – لغة فرنسية الشهادة: الثانوية العامة الفرع: العلوم العامة نموذج رقم: 1/ 2019 المدّة: اربع ساعات

أسس التصحيح

QI	Réponses	Notes
1-	Arg $(z')=\pi-2\theta-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-2\theta\ [2\pi]$ (Faux).	0,5
2-	$\lvert z-2i\rvert=\lvert\bar{z}-i\rvert$ donne $x^2+(y-2)^2=x^2+(y+1)^2$ alors $y=\frac{1}{2}$ (Faux).	0,5
3-	$e^{-2x}-2e^{-2x}+1>0$ donne $(e^{-x}-1)^2>0$ alors $x\neq 0$ et $e^{-2x}-2e^{-x}+1\leq 1$ donne $e^{-x}(e^{-x}-2)\leq 0$ donc $x\geq -\ln 2$. D = $[-\ln 2;\ 0[\cup]0;+\infty[$. (Faux).	1
4-	$x\in D_g$ donc $x>0$ et $\ln x<1$; $x<e$. $D_{fog}=]0,e[$ (Vrai).	0,5
5-	$I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ (Intégration par parties) (Vrai).	0,5

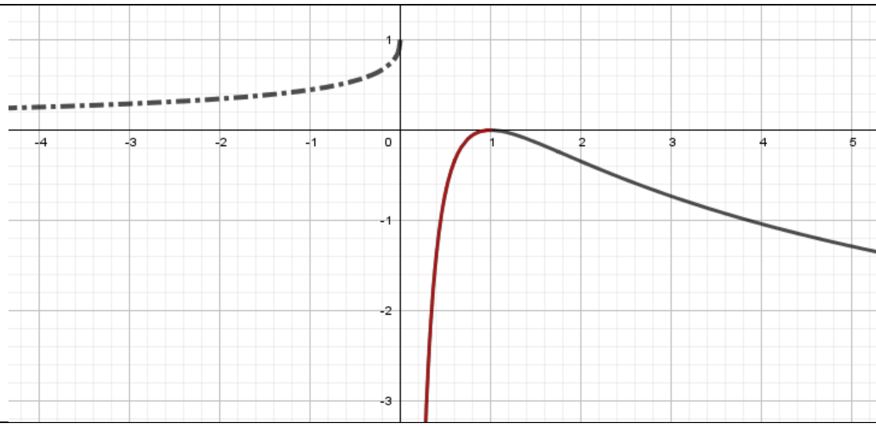
QIII	Réponses	Notes
1-a-	Pour $m=0$, $E(1,-1,2)$ est sur (d) et pour $m=1$, $L(3,-1,1)$ est sur (d) .	0,5
b-	$\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{V_d})=0$; $x+5y+2z=0$	0,5
2-	(Δ) : $x=2k$, $y=-6$, $z=-k$; k *est un réel.*	0,5
3-a-	$(Q)=(LEF)$ et $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{FE}\wedge\overrightarrow{FL}=-5\,\vec{i}+5\,\vec{j}-10\,\vec{k}$	0,5
b-	$\overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{n_Q}=0$ alors (P) est perpendiculaire à (Q).	0,25
c-	F est sur (Δ) et $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{V_\Delta}=0$	0,75
4)	A et B sont sur (C), alors $AF=BF=FE=\sqrt{30}$ Par suite $5k^2=30$; $k^2=6$ et $k=\pm\sqrt{6}$ $A(2\sqrt{6},-6,-\sqrt{6})$ et $B(-2\sqrt{6},-6,\sqrt{6})$	1
5)	(Δ) est parallèle à (P) alors pour chaque point M sur (Δ) le volume de $MOEL$ est le même. Donc le volume de $(AOEL)$ = volume $(FOEL)$ = $\frac{1}{6}\begin{vmatrix}0 & -6 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=5\ \textit{unités de volume}$	1

QIII	Réponses	Notes
	Partie A.	
1-	$P(G/A)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$. $P(G\cap A)=P(A)\times P(G/A)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{30}$.	0,5
2-	$P(G\cap C)=P(C)\times P(G/C)=\frac{2}{10}\times\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{35}$.	0,5
3-	$P(G\cap B)=P(B)\times P(G/B)=\frac{5}{10}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$ $P(G)=\frac{1}{30}+\frac{1}{35}+\frac{1}{30}=\frac{1}{15}+\frac{1}{35}=\frac{7+3}{105}=\frac{10}{105}=\frac{2}{21}$.	1
4-	$P((A\cup B)/\overline{G})=\frac{P[(A\cup B)\cap\overline{G}]}{P(\overline{G})}=\frac{P(A\cap\overline{G})+P(B\cap\overline{G})}{P(\overline{G})}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{8}{9}+\frac{5}{10}\times\frac{14}{15}}{\frac{19}{21}}=\frac{\frac{11}{15}}{\frac{19}{21}}=\frac{77}{95}$.	1
	Partie B.	
1-	$P(D)=P(\text{deux couleurs différents})=\frac{4(n+2)}{C_{n+6}^2}=\frac{8(n+2)}{n^2+11n+30}$	0,5
2-	$P(\overline{D})=1-P(D)$ alors $\frac{16(n+2)}{n^2+11n+30}=1$ n'admet pas de solutions.	0,5

QIV	Réponses	Notes
	Partie A.	
1-	$(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $K=\frac{BC}{AE}=\frac{EC+EB}{AE}=\tan\hat{B}+\tan\hat{C}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$	0,75
2)a-	F = L'intersection de la perpendiculaire en C à (BC) et la perpendiculaire en B à (AB).	0,5
b-	Comme (CL) est ⊥ à (EC) et (BL) est ⊥ à (AC) alors $L=(AB)\cap(CF)$.	0,5
3)a-	(d) = la droite passant par B et perpendiculaire à (AF) ; $S(d)$ = (AF).	0,5
b-	$S((d)\cap(AF))=S(d)\cap S(AF)=(AF)\cap(d)=I$ (centre)	0,5
4-a-	$J=(BC)\cap(AF)$; $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{FB}$ mais $FB=\frac{5}{2}AB=5$ alors k $=-\frac{4}{5}$;	1
b-	$G=(L\,J)\cap$ la parallèle par C à (AB).	0,5
5)-a-	Soh = S' (? , $\frac{4}{5}\times\frac{5}{2}=2$, $-\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$)	0,5
b-	C est sur (FL) et $h(FL)=(AG)$ alors $h(C)=E$, mais $S(E)=C$ donc $Soh(C)=C$ C est le centre de Soh.	0,75
c-	$C\xrightarrow{h}E\xrightarrow{S}C$ alors $E\xrightarrow{S}C\xrightarrow{h}E$ donc, E est le centre de hoS.	0,5
	Partie B.	
1)a-	$hoS\,(E\,,2\,,-\frac{\pi}{2})$; $z'=-2iz+b$. $hoS(A)=C$ alors $4i=0+b$ et $z'=-2iz+4i$.	0,5
b-	$z_E(1+2i)=4i$ alors $z_E=\frac{8}{5}+\frac{4}{5}i$	0,5
2)	$hoS(C)=h(S(C)=h(L)=G$. $z_G=-2iz_C+4i=-2i(4i)+4i=8+2i$	0,5
3)	Comme (AG)=$h(FL)$ alors (AG) est parallèle à (CL) et comme (CG) est parallèle à (AB) alors $LAGC$ est un parallélogramme.	0,5

QV	Réponses	Notes
1)a-	$z' = z^2 - 2z = (z-1)^2 - 1$ alors $z'+1 = (z-1)^2$.	0,5
b-	$IM = 2$, alors $BM' = 4$ et M' varie sur le cercle de centre B et rayon 4.	0,5
2)a-	$z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ alors $x' = x^2 - y^2 - 2x$ et $y' = 2y(x-1)$.	0,5
b-	z' est imaginaire pur, alors $x^2 - y^2 - 2x = 0$ et $y(x-1) \neq 0$. ($y \neq 0$, $x \neq 1$.	0,5
3)a-	$(x-1)^2 - y^2 = 1$, équation d'une hyperbole équilatère de centre $I(1,0)$.	0,75
b-	Sommets $O(0,0)$ et $A(2,0)$. Asymptotes: $y = x-1$ et $y = -x+1$.	1
4)a-	$z_L + 1 = 1 + i\sqrt{3}$. $(z_G - 1)^2 = (\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2})^2 = 1 + i\sqrt{3} = z_L + 1$.	0,5
b-	Comme z_L est imaginaire pur, alors G est sur (H).	0,5
c-	$2x - 2yy' - 2 = 0$ alors $y' = \frac{x-1}{y} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3} = Pente(BL)$	0,5
5)a-	$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$	0,75
b-	(BL): $y = \sqrt{3}(x+1)$. Par intersection avec (E): $(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x+1)^2 = 1$ alors $4x^2 - 4x + 1 = 0$. $(2x-1)^2 = 0$ donc (BL) est tangente à (E) en $J(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$.	1
6)	$P(1, 2\sqrt{3})$. Aire = Aire du triangle of BIP - $\frac{1}{4}$ aire de (E). $= \frac{2\times 2\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}(\pi \times 1 \times 3) = 2\sqrt{3} - \frac{3\pi}{4}\, unités\ d'aire$	1

QVI	Réponses	Notes
	Partie A.	
1)a-	$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$	0,5
1)b-	$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$. x : 0 … $+\infty$ $g'(x)$: $+$ $g(x)$: $\nearrow$	1
2)	$g(1) = 0$ alors $g(x) > 0$ pour $x > 1$.	0,5
	Partie B.	
	$f(x) = (\frac{1-x}{x}) \ln x$	
1)a-	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ Alors $y'y$ est une asymptote à (C)	0,75
b-	$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors (C) admet une direction asymptotique suivant $(x'x)$.	0,75

2)a-	$f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$. x : 0 ; 1 ; $+\infty$ $f'(x)$: $+$; 0 ; $-$ $f(x)$: $-\infty$ ↗ 0 ↘ $-\infty$	1,25
		1
3) a-	$x \in]0,1]$, f est continue et strictement croissante donc elle admet une fonction réciproque h.	0,5
b-	$D_h = R_f =]-\infty, 0]$	0,75
4)	A= Aire limitée par (C), $x'x$, $x = \alpha$, $x = 1$ $A = \int_1^{\alpha} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}ln^2x - xlnx + x\right]_1^{\alpha} = \frac{1}{2}ln^2\alpha - \alpha ln\alpha + \alpha - 1$ Si $A = \alpha - \alpha ln\alpha$, alors $\frac{1}{2}ln^2\alpha - 1 = 0$; $ln^2\alpha = 2$ $ln\alpha = \sqrt{2}$ (à rejeter); $ln\alpha = -\sqrt{2}$ donne $\alpha = e^{-\sqrt{2}}$.	1
5)a-	$f(\alpha) = \left(e^{\sqrt{2}} - 1\right)\left(-\sqrt{2}\right)$ $\alpha - h(x) > 0$, alors $h(x) < \alpha$ donc $x \in \left]-\infty, \sqrt{2}\left(1 - e^{\sqrt{2}}\right)\right[$	1
b-	Si $x \to -\infty$, $h(x) \to 0$ et $P(x) \to -\sqrt{2}$ Si $x \to \sqrt{2}\left(1 - e^{\sqrt{2}}\right)$, $P(x) \to -\infty$	0,5
	Partie C.	
1)a-	Pour $n \geq 1$,$n < n + 1$ or f est strictement décroissante alors $f(n) > f(n+1)$ Comme la fonction exponentielle est strictement croissante alors $e^{f(n)} > e^{f(n+1)}$, donc (U_n) est strictement décroissante. **Ou:** pour $x \geq 1$ soit $s(x) = e^{f(x)}$; $s'(x) = f'(x)e^{f(x)} < 0$ alors S est une fonction strictement décroissante par suite (U_n) est strictement décroissante.	1
b-	$U_n = e^{f(n)}$, alors $U_n > 0$	0,5
c-	(U_n) est strictement décroissante et minorée par 0 alors (U_n) est convergente. Si $n \to +\infty$, $f(n) \to -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = 0$	0,5
2)	$U_n = e^{\left(\frac{1-n}{n}\right)\ln n} = e^{\ln n^{\frac{1-n}{n}}} = n^{\frac{1-n}{n}}$	0,5