ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation: (P): $x+y+z-1=0$, et les deux droites (d) et (d') d'équations:

$(d)\begin{cases}x=t-1\\y=t+1\\z=-2t+1\end{cases}$ et $(d')\begin{cases}x=-1\\y=m+1\\z=2m-2\end{cases}$ Où m et t sont deux paramètres réels.

1- a) Vérifier que (d) est contenue dans (P).
   b) Calculer les coordonnées de I, le point d'intersection de (d') et (P).
   c) Montrer que (d) et (d') sont non coplanaires.

2- Soit (Q) le plan contenant (d') et perpendiculaire à (P), et soit (Δ) la droite d'intersection de (P) et (Q).
   a) Montrer que $x-2y+z+5=0$ est une équation de (Q).
   b) Ecrire un système d'équations paramétriques de (Δ).
   c) Prouver que (d) et (Δ) se coupent en $E(0,2,-1)$.

3- Soit F le point de (d) tel que $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IF}=\frac{1}{2}$.
   a) Calculer les coordonnées de F.
   b) Prouver que le triangle IEF est semi-équilatéral.

II- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, on donne les points $M(z)$, $M'(z')$, $I(1+2i)$ et $E(5)$. Les deux nombres complexes z et z' sont tels que $z'=2iz+5$.

1- a) Si z est imaginaire pur, prouver que z' est réel.
   b) Si $z'=5i\sqrt{3}$, écrire z en forme exponentielle.

2- a) Prouver que $z_{\overrightarrow{IM'}}=2iz_{\overrightarrow{IM}}$.
   b) Exprimer IM' en fonction de IM. Prouver que $(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.
   c) Déduire que si M décrit la droite (Δ) d'équation $(x=1)$, alors M' décrit une droite dont on déterminera son équation.

3- Soit $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$, où x, y, x', et y' sont des nombre real.
   a) Exprimer x' et y' en fonction de y et x.
   b) Si $x+2y=5$, montre que (MM') est parallèle à $(y'y)$, puis utiliser le résultat $(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ pour construire M' lorsque $x+2y=5$.
   c) Si M' décrit le cercle (C') de centre E et de rayon 2, prouver que M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon 1.

III- (4 points)

On trouve ci-dessous le résultat d'un sondage sur 500 personnes :

- 70% de ces personnes sont des femmes
- 300 femmes suivent un régime d'alimentation
- 80% de la population du sondage suit un régime d'alimentation.

Partie A

Une personne est choisie au hasard, et on considère les évènements suivants

F : La personne choisie est une femme.

R : La personne choisie suit un régime d'alimentation.

1- Prouver que P$\left({}^{R}/_{F}\right) = \frac{6}{7}$.

2- a) Calculer P$(R \cap F)$, puis déduire P$(R \cap \bar{F})$.

b) Prouver $P\left({}^{R}/_{\bar{F}}\right) = \frac{2}{3}$.

3- Sachant que la personne choisie ne suit pas un régime d'alimentation, prouver que la probabilité que cette personne est un homme est 0,5.

Partie B

Dans cette partie, deux personnes sont choisies au hasard et simultanément du groupe des personnes qui **ne suivent pas le régime**. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre des hommes parmi ces deux personnes.

1- Prouver que P(X=2) = $\frac{49}{198}$.

2- Déterminer la loi de probabilité de X.

3- Si X désigne le nombre de femmes parmi les deux personnes choisies, la loi de probabilité doit changer ? Justifier.

IV- (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - \frac{4e^x}{1+e^x}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Déduire que (C) admet deux asymptotes.

b) Prouver que f est une fonction impaire, puis donner une interprétation graphique au résultat.

2- a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

b) Ecrire une équation de (T), la tangente en O à (C).

c) Tracer (T) et (C).

3- a) Prouver que f admet une fonction réciproque g.

b) Déterminer le domaine de définition de g. Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

c) Prouver que la courbe (C') de g est tangente en O à (C). Tracer (C') dans le même repère que (C).

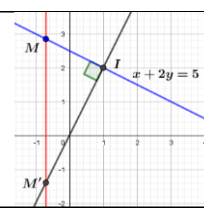
4- Soit (D) le domaine limité par (C'), $y'y$ et la droite d'équation $(y = a)$ avec $a > 0$.

a) Calculer l'aire de (D) en fonction de a.

b) Trouver a pour que cette aire soit égale à $4ln2$ unité d'aire.

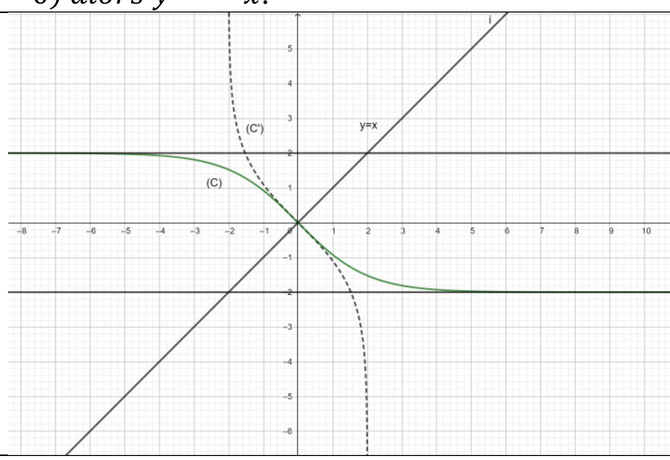
أسس التصحيح

Q I	Eléments de réponses	Note
1-a	Substituer les équations paramétriques de *(d)* dans *(P)*. *t-1+t+1-2t+1-1=0* ⇒ *(d)*⊂ *(P)*	0,25
1-b	Substituer les équations paramétriques de*(d')* dans *(P)*. *-1+ m + 1 + 2m-2-1= 0* ⇒m=1, Alors *(d')* coupe *(P)* en *I(-1,2,0)*.	0,5
1-c	$\vec{V}_d \neq \alpha\vec{V}_{d'}$ non coplanaires ou concourantes , mais *I* appartient à *(d')* et n'appartient pas à *(d)* alors*(d)* & *(d')* sont non coplanaires. **Ou** résoudre le système de 3 équations deux inconnues	0,5
2-a	Substituer les équations paramétriques de *(d')*dans *(Q)*. *-1-2m -2 + 2m-2+5= 0* alors *(d')* ⊂ *(Q)* $\vec{N}_{(Q)}.\vec{N}_P = 0$ donc ils ne sont pas perpendiculaires. **Ou** $\overrightarrow{IM}.(\vec{V}_{d'} \times \vec{n}_{(p)}) = 0$	0,5
2-b	$\vec{V}_{(\Delta)} = \vec{N}_{(P)} \times \vec{N}_{(Q)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{k}$ et $I \in (\Delta)$ alors $\overrightarrow{IM} = \alpha\vec{V}_{(\Delta)}$. $(\Delta): \begin{cases} x = 3\alpha - 1 \\ y = 2 \\ z = -3\alpha \end{cases}$	0,5
2-c	Substituer les coordonnées de *E* dans *(d)*. ⇒ *t=1* ⇒ *E* ∈ *(d)*, et pour $\alpha = \frac{1}{3}$ $E \in (\Delta)$.	0,5
3-a	*F* ∈ *(d)* ⇒ *F(t-1,t+1, -2t+1)*, $\overrightarrow{IF}(t, t-1, -2t+1)$, $\overrightarrow{IE}(1, 0, -1)$ $\overrightarrow{IF}.\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow F(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$,	0,5
3-b	$\overrightarrow{IF}\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right)$ et $\overrightarrow{IF}.\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}$ alors $IE.IF\cos(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IE}) = \frac{1}{2}$ alors $\cos(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IE}) = \frac{1}{2}$ alors $\widehat{EIF} = \frac{\pi}{3}$ *et* $\overrightarrow{FE}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$, $\overrightarrow{FI}.\overrightarrow{FE} = 0$ alors $\widehat{IFE} = \frac{\pi}{2}$ donc *IEF* est un triangle semi équilatéral en at F.	0,75

Q II	Eléments de réponses	Note
1-a	Si *Z* est imaginaire pur, alors $Z = yi$ où y est un réel non nul. $Z' = 2i(yi) + 5 = 5 - 2y$ qui est un réel.	0,5
1-b	$Z' = 5i\sqrt{3}$ alors $Z = \frac{5i\sqrt{3}-5}{2i} = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i = 5e^{\frac{\pi}{6}i}$	0,5
2-a	$Z_{\overrightarrow{IM'}} = Z' - Z_I = 2iZ + 4 - 2i = 2i(Z - 1 - 2i) = 2iZ_{\overrightarrow{IM}}$	0,25
2-b	$\frac{Z_{\overrightarrow{IM'}}}{Z_{\overrightarrow{IM}}} = 2i$ alors $IM' = 2IM$ et $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	0,5
2-c	*M* varies sur une droite (Δ) passant par I, et comme $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc M' décrit la droite passant par I et ⊥ (Δ) d'équation y=2.	0,5
3-a	$x' + iy' = 2i(x + iy) + 5 = 5 - 2y + 2xi$. alors $x' = 5 - 2y$ et $y' = 2x$.	0,5
3-b	Si $x + 2y = 5$, alors $x = 5 - 2y = x'$ donc (MM') ↗↗ $(y'y)$ comme *M* est sur la droite (d) d'équation $x + 2y = 5$, qui passe par *I* alors M' est le point d'intersection de la droite ⊥ en *I* à (d) avec la ↗↗ en *M* à $(y'y)$. 	0,75
3-c	$EM' = 2 \Rightarrow (x' - 5)^2 + y'^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow M$ varie sur le cercle *(C)* de centre *O* et de rayon 1.	0,5

Q III	Eléments de Réponses	Note
A-1	Le nombre des femmes est $0,7 \times 500 = 350$. Le nombre des femmes qui font un régime alimentaire est 300, donc $P(R/F) = \frac{300}{350} = \frac{6}{7}$	0,5
A-2a	$P(R \cap F) = P(F) \times P(R/F) = 0,7 \times \frac{6}{7} = 0,6$ $P(R) = P(F \cap R) + P(\bar{F} \cap R)$; $0,8 = 0,6 + P(\bar{F} \cap R) \Rightarrow P(\bar{F} \cap R) = 0,2$	0,75

A-2b	$P\left(R/\overline{W}\right) = \frac{P(\overline{W}\cap R)}{P(\overline{W})} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}$	0,5
A-3	$P(R/\bar{F})=\frac{2}{3}$ et $P(\bar{R}/\bar{F}) = \frac{1}{3}$; alors $P(\bar{F}/\bar{R})=\frac{P(\bar{F}\cap\bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{0,3\times\frac{1}{3}}{0,2} = \frac{1}{2}$	0,75
B-1	$P(X=2) = \frac{C_{50}^2}{C_{100}^2} = \frac{49}{198}$	0,5
B-2	$P(X=0) = \frac{C_{50}^2}{C_{100}^2} = \frac{49}{198}$; $P(X=1) = \frac{C_{50}^1\times C_{50}^1}{C_{100}^2} = \frac{50}{99}$	0,75
B-3	La loi de probabilité de *X* ne changera pas car le nombre de femmes qui ne suivent pas le régime est le même que celui des hommes.	0,25

Q IV	Eléments de Réponses	Note
1-a	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2\ donc\ y = 2\ A.H.$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2-\frac{4e^x}{1+e^x} \overset{R.H}{=} \lim_{x\to+\infty} 2-\frac{4e^x}{e^x} = -2\ alors\ y = -2\ A.H.$	1
1-b	Le domaine est centré en 0 et $f(-x) = 2-\frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}} = 2-\frac{4}{1+e^x} = \frac{2e^x-2}{1+e^x}$ $-f(x) = -2+\frac{4e^x}{1+e^x} = \frac{2e^x-2}{1+e^x} = f(-x)$; alors O est centre de symétrie de (C).	0,75
2-a	$f'^{(x)} = \frac{-4[e^x(e^x+1)-e^xe^x]}{(1+e^x)^2} = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} < 0$ $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f' & & - & \\ \hline f(x) & +2 & \searrow & -2 \end{array}$	0,75
2-b	$y - f(0) = f'(0)(x-0)\ alors\ y = -x.$	0,25
2-c		1
3-a	f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une fonction réciproque g.	0,25
3-b	$D_g = R_f =]-2,2[$; $y = 2-\frac{4e^x}{1+e^x} \Longrightarrow y+ye^x = 2+2e^x-4e^x \Longrightarrow e^x(y+2) = 2-y$ Alors $e^x = \frac{2-y}{2+y} \Longrightarrow x = Ln(\frac{2-y}{2+y}) \Longrightarrow g(x) = Ln(\frac{2-x}{2+x})$	1,25
3-c	Le symétrique de(T) par rapport à *y=x est elle même*, donc elle est tangente à (C'), ce qui veut dire que (C') est tangente à (C)en $O.(C')$ sur la figure.	0,75
4-a	$A = \int_o^a \left(-2+\frac{4e^x}{1+e^x}\right)dx = 4Ln(1+e^x)-2x]_o^a$ $=4Ln(1+e^a)-4Ln2-2a$ unités de aire.	1
4-b	$4Ln(1+e^a)-4Ln2-2a = 4Ln2 \Longrightarrow 2Ln\left(\frac{1+e^a}{4}\right) = a$ then $e^{2a}-14e^a+1 = 0$ $a = Ln(7+4\sqrt{3})$	1