المادة: رياضيات – لغة فرنسية الشهادة: الثانوية العامة الفرع: العلوم العامة نموذج رقم: 2/ ٢٠١٩ المدّة: اربع ساعات.	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم: الرياضيات	المركز التربوي للبحوث والإنماء

ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (1 point)

Dans le tableau ci-dessous, une seule réponse est correcte. Ecrire le numéro de la question et la réponse correspondante en justifiant votre choix.

	Question	Réponse a	Réponse b	Réponse c
1	$\arcsin\left(\sin\left(\frac{25\pi}{4}\right)\right) =$	$\frac{25\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{4}$
2	$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x-3}}dx$	$\arcsin(x+2)+c$	$\arcsin(x-2)+c$	$\frac{1}{2}\arcsin(x-2)+c$
3	Si Z_1 et Z_2 sont les racines de l'équation : $Z^2-2(1+i)Z+k=0$, où k est un réel, alors: $\lvert Z_1+Z_2\rvert =$	9	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
4	Si la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe non nul Z ont des signes différents, alors un $\arg\left(\frac{Z+\bar{Z}}{Z-\bar{Z}}\right) =$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	π

II- (2 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les deux droites d'équations paramétriques : $(d_1)\begin{cases}x=-t+1\\y=5t+1\\z=4t-2\end{cases}$ et $(d_2)\begin{cases}x=4m-3\\y=m\\z=5m-7\end{cases}$,

où t et m sont deux nombres réels.

1) a) Vérifier que (d_1) et (d_2) se coupent en $A(1,1,-2)$.
   b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (P) déterminé par (d_1) et (d_2) est : $x+y-z-4=0$.
2) Soit (Q) le plan d'équation $2x-y+z-2=0$.
   a) Montrer que les deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
   b) Soit (D) la droite d'intersection de (P) et (Q). Déterminer les coordonnées de H, le point d'intersection de (D) et (d_1).
   c) Déterminer un point G de (d_2) tel que $AG = AH$.
   d) Déduire les coordonnées d'un un vecteur directeur d'une bissectrice de l'angle $\widehat{GAH}$.

III- (3,5 points)

Un joueur a un dé cubique ayant six faces numérotées de 1 à 6 et trois urnes U_1, U_2, et U_3 contenant, chacune, 5 boules. Il y a trois boules noires dans U_1, et deux boules noires dans U_2, et une boule noire dans U_3; et le reste des boules dans les urnes sont blanches.

On considère le jeu suivant : le joueur lance le dé.

- Si le nombre obtenu est 1, alors il choisit, au hasard et simultanément, deux boules de U_1.
- Si le nombre obtenu est 3 ou 6, alors il choisit, au hasard et successivement avec replacement, deux boules de U_2.
- Si le nombre obtenu n'est ni 1, ni 3 et ni 6, alors il choisit, au hasard et successivement sans replacement, deux boules de U_3.

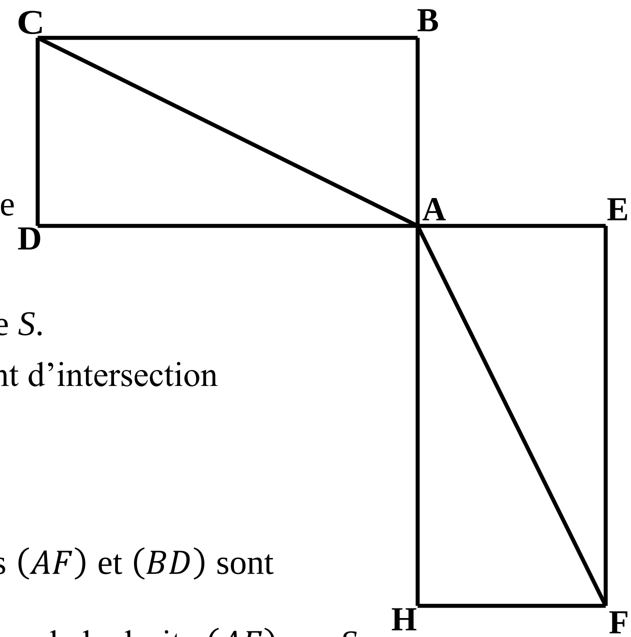
On considère les événements suivants :

N: "Les boules choisies ont des couleurs différents ".

E_i: "L'urne choisie est U_i" (i = 1, 2, ou 3).

1) Le jeu se déroule.
   a) Montrer que $P(E_1) = \frac{1}{6}$ et $P(N/E_1) = \frac{3}{5}$. Déduire $P(N \cap E_1)$.
   b) Montrer que la probabilité de choisir deux boules des couleurs différents est $\frac{23}{50}$.
   c) Calculer la probabilité pour que le nombre obtenu par le dé est 1, sachant que les boules choisies ont des couleurs différents.
2) Dans cette partie, le joueur joue deux fois le jeu, chaque fois est indépendante de l'autre et les urnes sont remises à leurs états initiaux après chaque fois.
   Dans chaque jeu, si le joueur choisit deux boules de couleurs différents il gagne 20$ autrement il doit payer 5$. Soit X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique du joueur à la fin des deux jeux.
   a) Montrer que 40, 15 et -10 sont les valeurs possibles de X.
   b) Montrer que $P(X = 15) = \frac{621}{1250}$.
   c) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Maintenant on s'intéresse à jouer le jeu n fois où n est un entier naturel non nul et en respectant les conditions de la partie 2).
   Soit (P_n) la suite de terme générale P_n tel que P_n est la probabilité de gagner 20$ au moins une fois à la fin de ces n parties.
   a) Montrer que $P_n = 1 - \left(\frac{27}{50}\right)^n$.
   b) Montrer que (P_n) est une suite strictement croissante.
   c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (P_n)$ et interpréter sa valeur.

IV- (4,5 points)



Dans le plan orienté, on considère deux rectangles directs superposables *ABCD* et *AHFE* tels que:

AB = 1, *AD* = 2 et $(\vec{AC}, \vec{AD}) = (\vec{AH}, \vec{AF})$.

On désigne par *S* la similitude directe que transforme *A* en *B* et *D* en *A*.

1) Déterminer un angle et le rapport de la similitude *S*.
2) On considère la rotation $R\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$ et soit *I* le point d'intersection des droites (BD) et (AF)
   a) Déterminer $R(D)$.
   b) Construire le point $L = R(B)$.
   c) Montrer que $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{HL}$ et que les deux droites (AF) et (BD) sont perpendiculaires.
3) a) Déterminer l'image de la droite (BD) et l'image de la droite (AF) par *S*.
   b) Déduire que le point *I*, est le centre de *S*.
4) Soit *G* le point tel que *AEGB* est un carré.
   On désigne par *J* le point d'intersection de (DG) et (AB).
   a) Déterminer la nature de $S \circ R$.
   b) Montrer que *J* est le centre de $S \circ R$.
5) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$, tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.
   a) Déterminer la forme complexe de *S*. En déduire Z_1.
   b) Déterminer l'antécédent de *G* par *S*.
   c) *N* est un point variable qui décrit le cercle (C') de centre *G* et rayon 1.
      Montrer que l'antécédent de *N* par *S* décrit un cercle (C) de centre et rayon à déterminer.

V- (3 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ on considère les points $A(4; 4)$ et $L(-1; 4)$.

Soit (*P*) la parabole de sommet *O*, axe focal $(x'x)$ et passant par *A*.

1) a) Montrer que $y^2 = 4x$ est une équation de (*P*).
   b) Calculer les coordonnées du foyer *F*, et écrire une équation de (*d*) la directrice de (*P*).
   c) Tracer (*P*).
2) Soit *J* le milieu de $[FL]$.
   a) Que représente (*AJ*) par rapport à $\widehat{FAL}$? Déduire que (*AJ*) est tangente à (*P*).
   b) Montrer que (*AJ*) coupe (*d*) en $I\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.
3) Soit (*Q*) la parabole d'équation $y = \sqrt{2}x^2 + a$.
   Calculer la valeur exacte de *a* pour que (*P*) et (*Q*) soient tangentes en un point à déterminer.

4) (E) est une ellipse d'équation $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$.
   a) Calculer les coordonnées de G et H, les points d'intersection de (E) et (P).
   b) Tracer (E) dans le même repère que (P).
   c) Calculer l'aire du domaine limité par (P) et $[GH]$.
   d) Déduire l'aire du domaine situé à l'intérieur de (E) et à l'extérieur de la région limitée par (P) et le triangle OGH.

VI- (6 points)
Partie A

On considère l'équation différentielle (E): $y''+3y'+2y=\left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{-x}$.

1) Montrer que la fonction P définie sur $]0;+\infty[$ par: $P(x)=e^{-x}\,ln\,x$ est une solution particulière de l'équation (E).
2) Déterminer la solution générale de l'équation $y''+3y'+2y=0$.
3) Déduire la solution générale de (E) et la solution particulière dont la courbe passe par les points : $A\left(1;\frac{3}{e}\right)$ et $B\left(2;\frac{3+ln2}{e^2}\right)$.

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x)=-3-lnx+\frac{1}{x}$ et l'on désigne par (C_g) sa courbe représentative.

1) Etudier les variations de g et construire son tableau de variations.
2) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et vérifier que: 0,45 < α < 0,46.
3) Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
4) Tracer la courbe (C_g).

Partie C

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x)=e^{-x}(3+lnx)$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et déduire les équations des asymptotes à (C).
2) a) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)=e^{-x}.g(x)$.
   b) Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$ et construire le tableau de variations de f.
3) Montrer que $f(\alpha)=\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$. Donner un encadrement de $f(\alpha)$.
4) Calculer $f(e^{-3})$ et tracer (C).
5) Soit A l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=e^{-3}$ et $x=\alpha$. Montrer que $A\le e^{-\alpha}$.

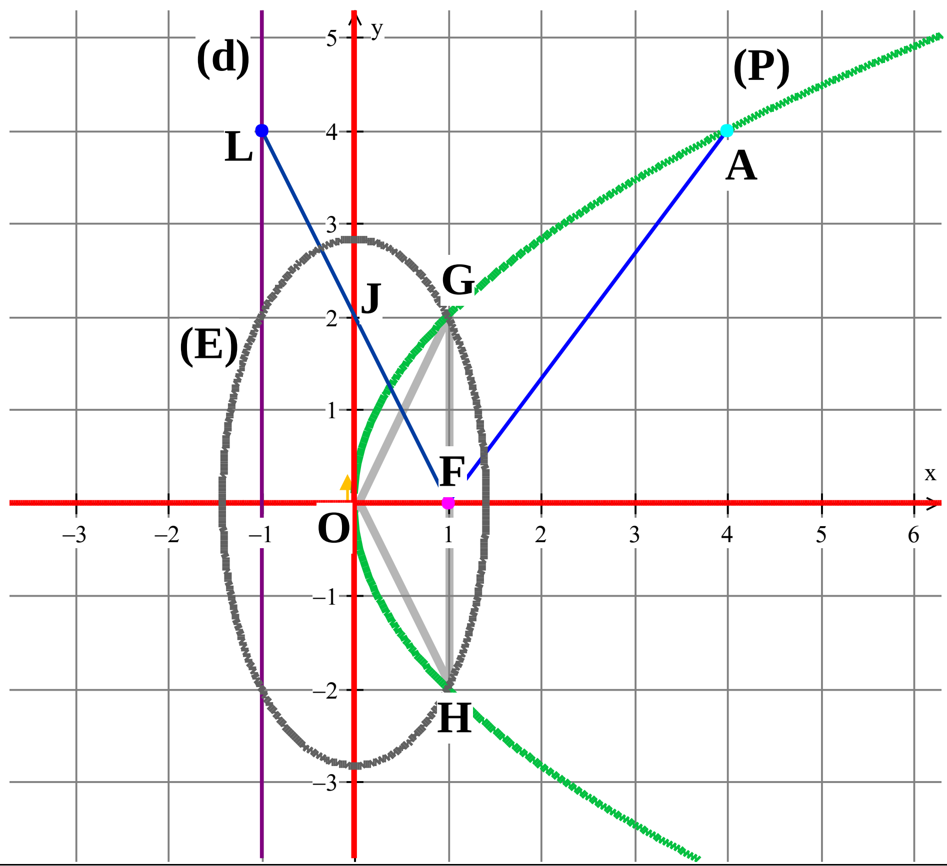
أسس التصحيح

QI	Corrigé	Notes
1	$\arcsin\left(\sin\left(\frac{25\pi}{4}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\left(\frac{25\pi}{4}-6\pi\right)\right)=\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{4}$. (b)	0,5
2	$\int\frac{1}{\sqrt{-x^2-4x-3}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-(x+2)^2}}dx=\arcsin(x+2)+c$. (a)	0,5
3	a = 1 et b = 2(1+i) donc $\lvert z_1+z_2\rvert=\left\lvert\frac{-b}{a}\right\rvert=\lvert 2(1+i)\rvert=2\sqrt{2}$. (c)	0,5
4	$\arg\left(\frac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}}\right)=\arg\left(\frac{2x}{2iy}\right)=\arg\left(\frac{x}{y}\right)-\arg(i)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}[2\pi]$; $\frac{\pi}{2}$ est un argument. (a)	0,5

QII	Corrigé	Notes
1a	Les coordonnées de A vérifient les deux équations. **OU** résoudre trois équations à deux inconnues m et t	٠,5
1b	Comme les deux droites sont sécantes, alors ils forment un plan unique alors il suffit de prendre deux points variables de ces droites et remplacer leurs coordonnées dans (P) l'un après l'autre. **OU** $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{V}_{(d_1)}\wedge\overrightarrow{V}_{(d2)})=0$ avec M(x;y;z) est un point de (P)	1
2a	$\overrightarrow{N}_{(P)}.\overrightarrow{N}_{(Q)}=0$	0,25
2b	Comme les deux plans sont perpendiculaires donc sécant alors le point d'intersection de (d_1) et (D) est en même temps que (d_1) et (Q) ce qi donne $H(2;-4;-6)$. **OU** déterminer un système des équations paramétriques de (D) et déterminer H par intersection de deux droites	0,75
2c	AG = AH donne $m=0$ ou $m=2$ alors $G(-3;0;-7)$ ou $G(5;2;3)$	0,5
2d	Comme le triangle AGH est isocèle en A alors $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}$ est un vecteur directeur de d'une bissectrice l'angle $\widehat{GAH}$. $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}\begin{vmatrix}-3\\-6\\-9\end{vmatrix}$ ou $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}\begin{vmatrix}5\\-4\\1\end{vmatrix}$	1

QIII	Corrigé	Notes
1a	$P(E_1)=P(\{1\})=\frac{1}{6}$; $P(N/E_1)=\frac{3\times 2}{C_5^2}=\frac{3}{5}$ alors $P(N\cap E_1)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$	1
1b	$P(N)=\frac{1}{10}+\frac{12}{25}\times\frac{2}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{23}{50}$	1
1c	$P(E_1/N)=\frac{P(E_1\cap N)}{P(N)}=\frac{1}{10}\times\frac{50}{23}=\frac{5}{23}$	0,5
2a	40 : le joueur obtient deux boules de couleurs différents deux fois. 15 : le joueur obtient deux boules de couleurs différents une fois -10 : le joueur obtient deux boules de même couleur deux fois	0,5
2b	$P(X=15)=\frac{23}{50}\left(1-\frac{23}{50}\right)\times 2!=\frac{621}{1250}$.	0,75
2c	$P(X=15)=\frac{621}{1250}$; $P(X=40)=\frac{23}{50}\times\frac{23}{50}=\frac{529}{2500}$ et $P(X=-10)=\frac{27}{50}\times\frac{27}{50}=\frac{729}{2500}$	0,5 0,5
3a	$P_n=1-\underbrace{\left(1-\frac{23}{50}\right)\times\left(1-\frac{23}{50}\right)\times\ldots\left(1-\frac{23}{50}\right)}_{\text{n fois}}=1-\left(\frac{27}{50}\right)^n$.	0,75
3b	$P_{n+1}-P_n=1-\left(\frac{27}{50}\right)^{n+1}-\left(1-\left(\frac{27}{50}\right)^n\right)=-\left(\frac{27}{50}\right)^n\left(\frac{27}{50}\right)^1+\left(\frac{27}{50}\right)^n=$ $\left(\frac{27}{50}\right)^n\left(-\frac{27}{50}+1\right)=\left(\frac{27}{50}\right)^n\left(\frac{23}{50}\right)>0$ alors (P_n) est une suite strictement croissante	1
3c	$\lim_{n\to+\infty}P(n)=1-0=1$ since $-1<\frac{27}{50}<1$ Lorsque n sera infiniment grand c'est certain que le joueur va gagner 20$ au moins une fois à la fin de ces n parties	0,25 0,25

QIV	Corrigé	Notes
1	$(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $k = \frac{BA}{AD} = \frac{1}{2}$	0,5 0,5
2a	R(D) = H car AH = AD et $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AH}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.	0,5
2b	L milieu [AD].	0,5
2c	AL = AB = HF car les deux rectangles sont identiques et (AL) est parallèle à (HF) alors $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{FH}$ donc ALHF est un parallélogramme par suite $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{HL}$. R(B) = L et R(D) = H alors (HL) et (DB) sont perpendiculaires or (FA) est parallèle à (HL) donc (AF) et (BD) sont perpendiculaires	0,5 0,5
3a	S(BD) = (AF) car c'est la droite qui passe par A image de D par S et ⊥ à (BD) ; S(AF) = (BD) car c'est la droite qui passe par B image de A par S et ⊥ à (AF)	0,5 0,5
3b	S((BD)$\cap$(AF)= (AF)$\cap$(BD) ; S(I) = I	0,5
4a	$S \circ R = S\left(I;\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}\right) \circ R\left(A;\frac{\pi}{2}\right) = S'\left(W;\frac{1}{2};\pi\right) = h\left(W;-\frac{1}{2}\right)$. Donc c'est une homothétie de centre W à déterminer et de rapport $-\frac{1}{2}$	0,75
4b	$S \circ R(A) = S(R(A)) = S(A) = B$ alors $\overrightarrow{WB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{WA}$ A, J et B sont alignés dans cet ordre, et D, J et G sont alignés dans cet ordre. D'après le théorème de Thales : $\frac{JB}{JA} = \frac{BG}{DA} = \frac{1}{2}$ ce qui donne que $\overrightarrow{JB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JA}$ car ces deux vecteurs sont colinéaires de sens différents. Alors W = J le centre de h.	1,25
5a	$a = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}i$ alors $z' = \frac{1}{2}iz + b$ or S(A) = B donc $z_B = \frac{1}{2}iz_A + b$; $i = \frac{1}{2}i(0) + b$; b = i alors $z' = \frac{1}{2}iz + i$. $z_I = \frac{b}{1-a} = \frac{i}{1-\frac{1}{2}i} = \frac{2i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$	1 0,5
5b	Soit K l'antécédent de G par S alors $z_G = \frac{1}{2}iz_K + i$ avec $z_G = 1+i$; $1+i = \frac{1}{2}iz_K + i$ alors $\frac{2}{i} = z_K$; $z_K = -2i$; alors K=H	0,5
5c	Soit M l'antécédent de N par S alors M décrit le cercle (C) de centre K et rayon r avec rayon de (C′) = $\frac{1}{2}$ rayon de (C). Rayon de (C) = 2(1) = 2. M décrit le cercle (C) de centre H et rayon 2	0,5

<table>
<tr><th>QV</th><th>Corrigé</th><th>Notes</th></tr>
<tr><td>1a</td><td>(P) est une parabole horizontale vers la droite de sommet O alors $y^2 = 2px$ or (P) passe par A alors 16=2p(4) ; p = 2 donc $y^2 = 4x$ est une équation de (P).</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>Le foyer F($\frac{p}{2}$;0) donc F(1 ;0) ;
La directrice (d) : x = $-\frac{p}{2}$ = -1.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>1c</td><td>
</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>A est un point de (P) alors AF = AL comme F est le foyer de (P) et L est le projeté orthogonal de A sur (d) par suite AFL est un triangle isocèle en A.

J est le milieu de [FL] alors la médiane (AJ) est la bissectrice intérieure de $\widehat{FAL}$ donc (AJ) est tangente à (P) en A.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>$\overrightarrow{AJ}\begin{vmatrix}-4\\-2\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{vmatrix}-5\\-\frac{5}{2}\end{vmatrix}$ alors les deux vecteurs sont colinéaires or I est un point de (d) donc (AI) coupe (d) en I.

OU déterminer une équation de la droite (AJ) et calculer les coordonnées du point d'intersection de (AJ) et (d).</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Il existe une tangente commune une tangente commune à (P) et (P′).

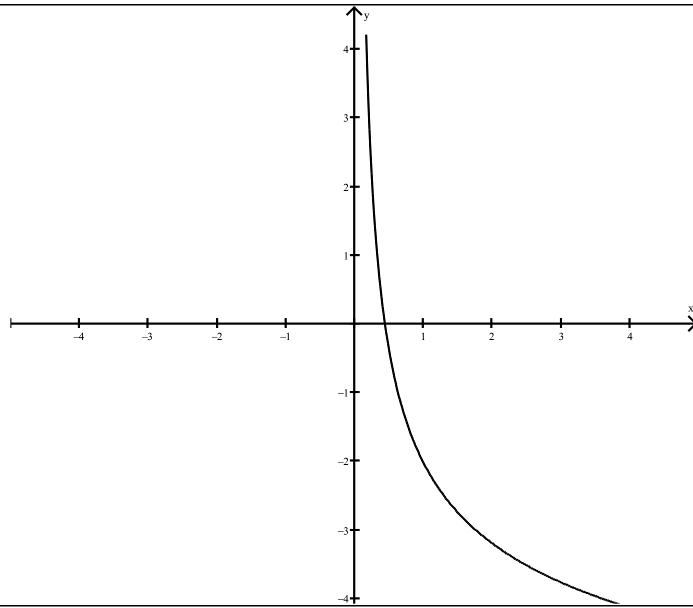
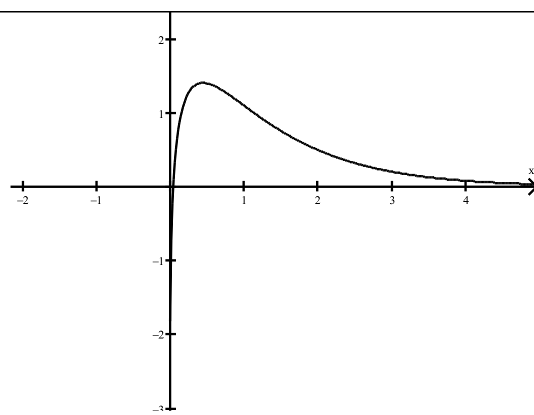
Dérivons suivant x :

$2yy' = 4$ alors $yy' = 2$.

$y' = 2\sqrt{2}x$</td><td>1</td></tr>
</table>

	$y' = y'$ donne $\frac{2}{y} = 2\sqrt{2}x$ alors $y = \frac{1}{\sqrt{2}x}$ par suite $\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^2 = 4x$; $x = \frac{1}{2}$ alors $y = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{2}$ donc $\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a$ ce qui donne $a = \frac{3}{4}\sqrt{2}$	
4a	$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ alors $y^2 = 8 - 4x^2$ donc $4x = 8 - 4x^2$ par suite $x' = 1$ acceptable car $1 \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ et $x'' = -2$ à rejeter car $-2 \notin \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ Donc G(1 ; 2) et H(1 ; -2).	0,5
4b	Voir la figure ci-dessus	0,5
4c	$A = 2\int_0^1 2\sqrt{x}dx = 4\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)_0^1 = \frac{8}{3}$ u.a	0,5
4d	L'aire = $\pi ab - \left[A - \frac{1\times 4}{2}\right] = \pi(\sqrt{2})(2\sqrt{2}) - \frac{8}{3} + 2 = 4\pi - \frac{2}{3}$ u.a	0,5

QVI	Corrigé	Notes
A1	$P''(x) + 3p'(x) + 2p(x) = \left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{-x}$	1
A2	$y_1 = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$	0,5
A3	$y = y_1 + p(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + e^{-x}\ln x$; $c_1 = 3$ et $c_2 = 0$; $y = e^{-x}(3 + \ln x)$	1,5
B1	$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$; $\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ $g'(x) < 0$ $\begin{array}{c\|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline g'(x) & \| & - & \\ \hline g(x) & \| +\infty & \searrow & -\infty \end{array}$	1
B2	Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ g est définie, continue et strictement décroissante elle passe de + à - donc g(x) = 0 admet une solution notée α; g(0,45) > 0 et g(0,46) < 0, donc $0.45 < \alpha < 0.46$	1
B3	Si $x \in]0;\alpha[$, g(x) > 0 ; si x = α, g(x) = 0 et si $x \in]\alpha;+\infty[$, g(x) < 0	0,5

B4		0,5
C1	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0^+$; x = 0 A.V et y = 0 A.H	1
C2a	$f'(x) = -e^{-x}(3+\ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)e^{-x} = e^{-x}.g(x)$	0,5
C2b	$e^{-x} > 0$ alors $f'(x)$ a même signe que $g(x)$ Si $x \in]0;\alpha[$ $f'(x) > 0$; si $x = \alpha, f'(x) = 0$ et si $x \in]\alpha;+\infty[$ $f'(x) < 0$ x : 0 ‖ α ‖ +∞ f′(x) : ‖ + 0 − f(x) : ‖ -∞ ↗ f(α) ↘ 0	1,5
C3	$\ln(\alpha) = -3 + \frac{1}{\alpha}$; $f(\alpha) = e^{-\alpha}\left(3 - 3 + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$; $1.37 < f(\alpha) < 1.41$	1
C4	 $f(e^{-3}) = 0$	1
C5	$A = \int_{e^{-3}}^{\alpha} f(x)dx \leq$ l'aire du rectangle de côtés α et $f(\alpha)$; alors $A \leq \alpha \times f(\alpha)$; $A \leq \alpha \times \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$. Donc $A \leq e^{-\alpha}$.	1