ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

مسابقة في مادة الرياضيات

المدة: ساعتان

(باللغة الفرنسيّة)

الاسم: ....

الرقم: ....

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct , on considère le point $A(1\,;1\,;1)$ et les deux droites (d_1)et (d_2)définies par :

$$(d_1):\begin{cases}x=t+1\\y=t+1\;;\;t\in\mathbb{R}\\z=t+1\end{cases}\quad \text{et}\quad (d_2):\begin{cases}x=-k+3\\y=k-1\quad;\;k\in\mathbb{R}\\z=k-1\end{cases}.$$

1) a. **Montrer** que les deux droites (d_1)et (d_2)ne sont pas parallèles et se coupent en A.

   b. **Montrer** que $y-z=0$ est une équation du plan (P) déterminé par (d_1)et(d_2).

2) Soit $B(1\,;0\,;0)$ un point d'une bissectrice(δ)d'un angle formé par (d_1)et (d_2)dans le plan(P).

   a. **Déterminer** les coordonnées du point E projeté orthogonal de B sur la droite (d_1).

   b**. Ecrire** un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) perpendiculaire en A à (P).

   c. On désigne par F le projeté orthogonal de B sur la droite (d_2)et M est un point de (Δ)où $y_M\neq 0$.

   Déterminer les coordonnées du point M pour que le volume du tétraèdre **MABF** soit égal à $\dfrac{2}{9}$ unités de volume.

II- (4 points)

Une urne U contient **six** boules : **quatre** boules rouges et **deux** boules bleues.

Un sac S contient **cinq** billets : **un** billet de 50 000 LL, **deux** billets chacun de 20 000 LL et **deux** billets chacun de 10 000 LL.

Partie A

On tire au hasard **une** boule de l'urne U

- Si cette boule est rouge, alors on tire au hasard, successivement et sans remise **deux** billets de S.
- Si cette boule est bleue, alors on tire au hasard et simultanément **trois** billets de S.

On considère les événements suivants :

R : " la boule tirée est rouge "

A : " la somme des valeurs des billets tirés est 70 000 LL ".

1) **a. Calculer** les probabilités $P(R)$ et $P\left(A/R\right)$

   b. vérifier que $P(A \cap R) = \dfrac{2}{15}$.

2) **a. Calculer** $P(A \cap \overline{R})$.

   b. Calculer $P(A)$.

Partie B

Dans cette partie, on tire au hasard, successivement et avec remise **deux** billets du sac S.
On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des valeurs des deux billets tirés.

1) **Déterminer** les six valeurs possibles de X.
2) **Montrer** que $P(X = 70000) = \dfrac{4}{25}$.
3) **Calculer** $P(X < 70000)$.

III- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives 1, 2, z et z' tels que $z' = \dfrac{z-2}{2-\overline{z}}$ où $z \neq 2$.

1) Dans cette partie on prend $z = 1 - i$.

   a. **Ecrire** z' sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

   b. **Montrer** dans ce cas que le quadrilatère $ABMM'$ est un parallélogramme.

2) Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux nombres réels.

   Déterminer le nombre complexe z pour lequel M et M' sont confondus.

3) a. **Montrer** que $|z'| = 1$ pour tout $z \neq 2$. En déduire que le point M' varie sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

   b. **Montrer** que $|z' - 1| \leq 2$ pour tout $z \neq 2$.

IV- (8 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{1 + \ln x}{x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,; \vec{i}, \vec{j}\right)$. (Unité graphique = 2 cm).

Soit (d) la droite d'équation $y = x$.

1) a. **Etudier,** suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

   b. **Déterminer** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

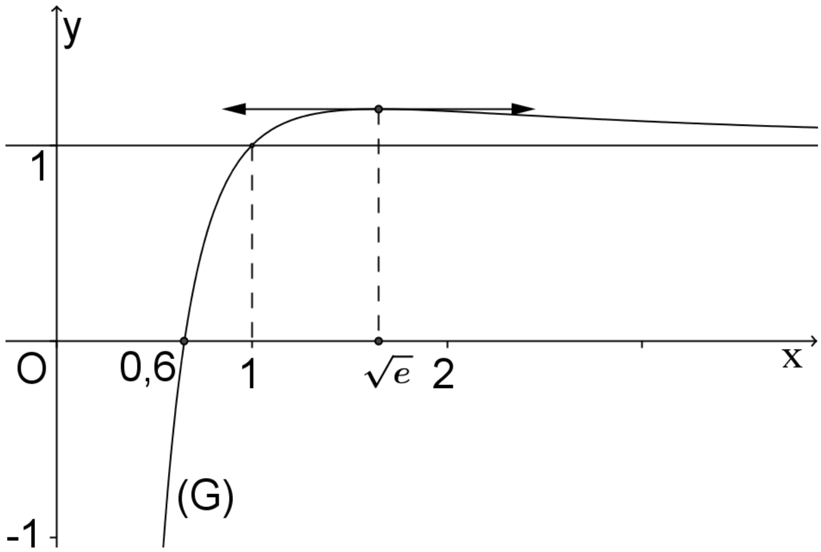
   c. **Montrer** que la droite (d) est une asymptote à (C).

2) a. **Déterminer** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$.

   b. **Déduire** une asymptote à (C).

3) Dans la figure ci-contre, on a :

- (Γ) est la courbe représentative de la fonction **f ' dérivée de f**.
- (Γ) admet un maximum pour $x=\sqrt{e}$.
- (Γ) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 0,6



a. **Dresser** le tableau de variations de f .

b. **Montrer** que l'équation $f(x)=0$ admet **exactement** deux racines dont l'une est 1.

c. On note α l'autre racine de l'équation $f(x)=0$. **Vérifier** que $0,4<\alpha<0,5$.

d. **Montrer** que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera ses coordonnées.

e. **Déterminer** les coordonnées du point A de (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (d).

4) **Tracer** (d), (T) et (C).

5) a. **Calculer**, en cm^2, l'aire $A(\alpha)$ du domaine limité par (C), (d) et les deux droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.

b. **Montrer** que $A(\alpha)=\left(2-2\alpha^4\right)\,cm^2$.