عدد المسائل: اربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le point $A(1;1;1)$ et les deux droites (d_1) et (d_2) définies par $(d_1):\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+1 \\ z=t+1 \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$ et $(d_2):\begin{cases} x=-k+3 \\ y=k-1 \\ z=k-1 \end{cases}$; $k\in\mathbb{R}$.

1) a. Montrer que les deux droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles et se coupent en A.

   b. Montrer que $y-z=0$ est une équation du plan (P) déterminé par (d_1) et (d_2).

2) Soit $B(1\,;0\,;0)$ un point d'une bissectrice (δ) d'un angle formé par (d_1) et (d_2) dans le plan (P).

   a. Déterminer les coordonnées du point E projeté orthogonal de B sur la droite (d_1).

   b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) perpendiculaire en A à (P).

   c. On désigne par F le projeté orthogonal de B sur la droite (d_2) et M est un point de (Δ) où $y_M \neq 0$.
   Déterminer les coordonnées du point M pour que le volume du tétraèdre MABF soit égal à $\frac{2}{9}$ unités de volume.

II- (4 points)

Une urne U contient **six** boules : **quatre** boules rouges et **deux** boules bleues.
Un sac S contient **cinq** billets : **un** billet de 50 000 LL, **deux** billets chacun de 20 000 LL et **deux** billets chacun de 10 000 LL.

Partie A

On tire au hasard **une** boule de l'urne U

- Si cette boule est rouge, alors on tire au hasard, successivement et sans remise **deux** billets de S.
- Si cette boule est bleue, alors on tire au hasard et simultanément **trois** billets de S.

On considère les événements suivants :
R : " la boule tirée est rouge "
A : " la somme des valeurs des billets tirés est 70 000 LL ".

1) Calculer les probabilités $P(R)$, $P\left(A/R\right)$ puis vérifier que $P(A\cap R)=\frac{2}{15}$.
2) Calculer $P(A\cap\overline{R})$. Déduire $P(A)$.

Partie B

Dans cette partie, on tire au hasard, successivement et avec remise **deux** billets du sac S.
On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des valeurs des deux billets tirés.

1) Déterminer les six valeurs possibles de X.
2) Montrer que $P(X=70000)=\frac{4}{25}$.
3) Calculer $P(X<70000)$.

III- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives 1, 2, z et z' tels que $z'=\dfrac{z-2}{2-\overline{z}}$ où $z\neq 2$.

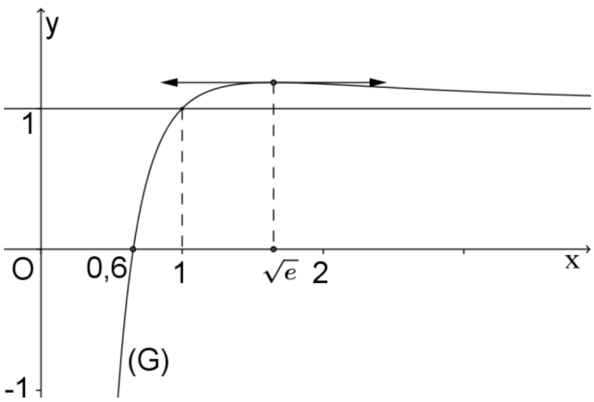
1) Dans cette partie on prend $z=1-i$.
   a. Ecrire z' sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
   b. Montrer dans ce cas que le quadrilatère $ABMM'$ est un parallélogramme.
2) Soit $z=x+iy$ où x et y sont deux nombres réels.
   Déterminer le nombre complexe z pour lequel M et M' sont confondus.
3) a. Montrer que $|z'|=1$ pour tout $z\neq 2$. En déduire que le point M' varie sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
   b. Montrer que $|z'-1|\leq 2$ pour tout $z\neq 2$.

IV- (8 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{1+\ln x}{x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (Unité graphique = 2 cm).

Soit (d) la droite d'équation $y=x$.

1) a. Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).
   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) est une asymptote à (C).
2) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ puis déduire une asymptote à (C).
3) Dans la figure ci-contre, on a :
   - (G) est la courbe représentative de la fonction **f' dérivée de f**.
   - (G) admet un maximum pour $x=\sqrt{e}$.
   - (G) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $0,6$.

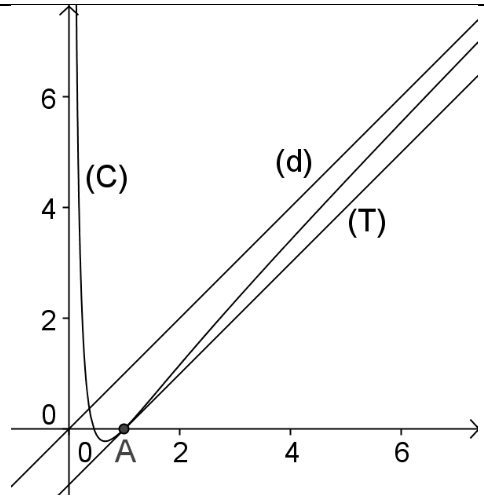


   a. Dresser le tableau de variations de f.
   b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet **exactement** deux racines dont l'une est 1.
   c. On note α la deuxième racine de l'équation $f(x)=0$.
      Vérifier que $0,4<\alpha<0,5$.
   d. Montrer que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera ses coordonnées.
   e. Déterminer les coordonnées du point A de (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (d).
4) Tracer (d), (T) et (C).
5) a. Calculer, en cm^2, l'aire $A(\alpha)$ du domaine limité par (C), (d) et les deux droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.
   b. Montrer que $A(\alpha)=\left(2-2\alpha^4\right)cm^2$.

وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات الرسمية	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع: علوم الحياة	دورة العام ٢٠١٨ الاستثنائية الثلاثاء ٣١ تموز ٢٠١٨

أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

Q.I	Eléments de réponses	4 pts
1.a	$\overrightarrow{u_1}(1;1;1)$ et $\overrightarrow{u_2}(-1;1;1)$ ne sont pas colinéaires. $A \in (d_1)$ pour $t = 0$ et $A \in (d_2)$ pour $k = 2$.	**1**
1.b	$(d_1) \subset (P): t+1-(t+1) = 0$ pour tout t et $(d_2) \subset (P): k-1-(k-1) = 0$ pour tout k. **OU** Soit M(x ; y ; z) un point de (P) et $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\right) = 0$	**0,75**
2.a	$\overrightarrow{BE}(t\,;\ t+1\,;\ t+1)$ et $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{u_1} = 0$ alors $t = -\frac{2}{3}$ donc $E\left(\frac{1}{3}\,;\ \frac{1}{3}\,;\ \frac{1}{3}\right)$	**1**
2.b	$\overrightarrow{n_P}(0\,;\ 1\,;\ -1)$ est un vecteur directeur de (Δ) donc (Δ) : $\begin{cases} x = 1 \\ y = m+1 \\ z = -m+1 \end{cases}$; $m \in \mathbb{R}$	**0,5**
2.c	L'aire du triangle AEB = l'aire du triangle AFB car [AB) est une bissectrice de l'angle $E\widehat{A}F$ donc $V_{MABE} = V_{MABF}$, $M \in (\Delta)$ donc M(1 ; m+1 ; –m+1) $V_{MABE} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)\right| = \frac{2}{9}$ donc $\lvert m \rvert = 1$ alors m = 1 ou m = –1 $M_1(1\,;\ 2\,;\ 0)$ ou $M_2(1\,;\ 0\,;\ 2)$ alors $M_1(1\,;\ 2\,;\ 0)$ acceptable **Ou** $V_{MABE} = \frac{A_{AEB} \times AM}{3}$	**0,75**
Q.II	**Eléments de réponses**	**4 pts**
A.1	$P(R) = \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{2}{3}$ $P(A/R) = P(50\,000 \text{ et } 20\,000)$ $= P\left(\left(1^{er}\ 50\,000 \text{ alors } 2^{ème}\ 20\,000\right) \text{ ou } \left(1^{er}\ 20\,000 \text{ alors } 2^{ème}\ 50\,000\right)\right)$ $= P(1^{er}\ 50\,000 \text{ alors } 2^{ème}\ 20\,000) + P(1^{er}\ 20\,000 \text{ alors } 2^{ème}\ 50\,000)$ $= \frac{C_1^1}{C_5^1} \times \frac{C_2^1}{C_4^1} + \frac{C_2^1}{C_5^1} \times \frac{C_1^1}{C_4^1} = \frac{1}{5}$ $P(A \cap R) = P(R) \times P(A/R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$	**1,5**
A.2	$P(A \cap \overline{R}) = P(\overline{R}) \times P(A/\overline{R}) = \frac{1}{3} \times \frac{C_1^1 C_2^1}{C_5^3} = \frac{1}{15}$ $P(A) = P(A \cap R) + P(A \cap \overline{R}) = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$	**1**
B.1	$50\,000 + 50\,000 = 100\,000$; $50\,000 + 20\,000 = 70\,000$; $50\,000 + 10\,000 = 60\,000$ $20\,000 + 20\,000 = 40\,000$; $10\,000 + 10\,000 = 20\,000$; $20\,000 + 10\,000 = 30\,000$ $X \in \{20\,000\ ;\ 30\,000\ ;\ 40\,000\ ;\ 60\,000\ ;\ 70\,000\ ;\ 100\,000\}$	**0,5**
B.2	$P(X = 70\,000) = P(50\,000 \text{ et } 20\,000)$ $= P(1^{er}\ 50\,000 \text{ alors } 2^{ème}\ 20\,000) + P(1^{er}\ 20\,000 \text{ alors } 2^{ème}\ 50\,000)$ $= \frac{C_1^1}{C_5^1} \times \frac{C_2^1}{C_5^1} + \frac{C_2^1}{C_5^1} \times \frac{C_1^1}{C_5^1} = \frac{4}{25}$	**0,5**
B.3	$P(X < 70\,000) = 1 - P(70\,000) - P(100\,000) = 1 - \frac{4}{25} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$	**0,5**

Q.III	Eléments de réponses	4 pts
1.a	$z' = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$	0,75
1.b	$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{MM'}} = 1$ et A,B, M et M ' ne sont pas colinéaires.	0,75
2	$z = \frac{z-2}{2-\bar{z}}$ donc $z - z\bar{z} + 2 = 0$ alors $x - x^2 - y^2 + 2 + iy = 0$ alors $x - x^2 + 2 = 0$ et $y = 0$ donc $z_1 = 2$ (inaceptable) ou $z_2 = -1$ (acceptable)	1
3.a	$\lvert z'\rvert = \frac{\lvert z-2\rvert}{\lvert 2-\bar{z}\rvert} = \frac{\lvert z-2\rvert}{\lvert \overline{z-2}\rvert} = \frac{\lvert z-2\rvert}{\lvert z-2\rvert} = 1$. Donc OM ' = 1 Alors M' varie sur un cercle de centre O et de rayon 1	1
3.b	$\lvert z'-1\rvert \le \lvert z'\rvert + \lvert -1\rvert \le 1+1 \le 2$ **OU** méthode géométrique …	0,5
Q.IV	**Eléments de réponses**	**8 pts**
1.a	$f(x) - x = -\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)$ $f(x) - x > 0,\ -\left(\frac{1+\ln x}{x}\right) > 0,\ 1+\ln x < 0,\ x < \frac{1}{e}$ alors (C) est au-dessus de (d) Pour $x > \frac{1}{e}$ alors (C) est au-dessous de (d) et pour $x = \frac{1}{e}$ alors (C) et (d) se coupent	1
1.b	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{-1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right] = 0$ alors (d) est une asymptote à (C) en $+\infty$	1
2	$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = 0 + \infty = +\infty$, donc $x = 0$ est une A.V.	1
3.a	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 0,6 & & +\infty \\ \hline f'(x) & \| & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & \| & +\infty \searrow & -0,2 & \nearrow +\infty & \end{array}$	0,75
3.b	On $]0;0,6[$: f est continue et strictement décroissante de $+\infty$ jusqu'à $-0,2 < 0$ alors l'équation f(x) = 0 admet une solution unique. On $]0,6;+\infty[$: f est continue et strictement croissante de $-0,2 < 0$ jusqu'à $+\infty$ alors l'équation f(x) = 0 admet une solution unique. f(1) = 0 donc 1 est une racine. Donc il y a exactement deux solutions 1 et autre.	0,5
3.c	$f(0,4) \times f(0,5) = (0,19) \times (-0,11) < 0$, alors $0,4 < \alpha < 0,5$.	0,25
3.d	$f''(x)$ s'annule en changeant son signe pour $x = \sqrt{e}$ Donc (C) admet un point d'inflexion ($\sqrt{e}$; f($\sqrt{e}$)).	0,5
3.e	$f'(x_A) = 1$ donc $x_A = 1$ alors A(1 ; 0)	0,75
4		1
5.a	$A(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} \frac{1+lnx}{x}dx = [\frac{(1+lnx)^2}{2}]_{\alpha}^{1}$ $= [\frac{1}{2} - \frac{(1+ln\alpha)^2}{2}]\ u^2$ $= 2 - 2(1+\ln\alpha)^2\ cm^2$	0,75
5.b	$f(\alpha) = 0$ $\alpha - \left(\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}\right) = 0$ $1 + \ln\alpha = \alpha^2$ $A(\alpha) = 2 - 2\left(\alpha^2\right)^2 = 2 - 2\alpha^4\ cm^2$	0,5