وزارة التربية والتعليم العالي المديريّــة العامة للتربية دائرة الامتحانات الرسمية	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع العلوم العامة	دورة الـعام ٢٠١٨ الاستثنائيّة السبت ٤ آب ٢٠١٨ مكيّفة / احتياجات خاصة

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

عدد المسائل: ست

مسابقة في مادة الرياضيات

المدة: أربع ساعات

(باللغة الفرنسيّة)

الاسم:...

الرقم:...

I- (2,5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les deux droites (D) et (D') définies par:

$$(D):\begin{cases} x=\lambda+1 \\ y=0 \\ z=\lambda+3 \end{cases} \quad (\lambda\in\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (D'):\begin{cases} x=t \\ y=3t-3 \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

1) **Montrer** que (D) et (D') sont non coplanaires.

2) On désigne par (P) le plan contenant (D') et parallèle à (D).

   Montrer $x-z=0$ est une équation de (P)

3) **Ecrire** une équation du plan (Q) contenant (D) et perpendiculaire à (P).

4) **Vérifier** que $A(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ est le point d' intersection de (D') et (Q).

5) a- **Déterminer** les coordonnées du point B projeté orthogonal de A sur (D).

   b- Soit $C(1\ ;\ 0\ ;\ 3)$ un point de (D).

   Vérifier que le triangle ABC est rectangle isocèle.

6) **Déterminer** les coordonnées des points M sur (D')pour que le volume du tétraèdre $MABC$ soit égal à **2** .

II- (2 points)

On considère la suite $\left(I_n\right)$ définie, pour tout entier $n \geq 1$, par : $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$.

1) **Montrer** que $I_n \geq 0$.
2) a- **Montrer** que $I_{n+1} \leq I_n$

   b- **Déduire** le sens de variations de (I_n).

3) **Justifier** que la suite $\left(I_n\right)$ est convergente.
4) **Montrer** que: $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$, à l'aide d'une <u>intégration par parties</u>
5) a- **Montrer** que $I_n \leq \frac{1}{ne}$, en <u>utilisant les deux parties 2) a- et 4)</u>

   b- **Déterminer** $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

III- (3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

- (E) est l'ellipse **d'équation : $5x^2 + 9y^2 = 45$**
- (P) est la parabole de foyer $F\ (-2\ ;\ 0)$ et de directrice la droite (d) d'équation $x = -4$.

1) **Vérifier** que $y^2 = 4x + 12$ est une équation de (P).
2) **Calculer** les coordonnées du point d'intersection de (E) et (P), pour $x \geq -3$.
3) a- **Déterminer** les coordonnées des quatre sommets de (E).

   b- $F(-2\ ;\ 0)$ est l'un des foyers de (E).

   Ecrire une équation de la directrice (Δ) de (E) associée à F.

4) a- **Calculer** les coordonnées des points d'intersection de (P) avec la droite d'équation **x = 1**

   b- **Tracer** (E) et (P).

5) Soit $M(\alpha\,;\beta)$ un point de (E).

a- **Ecrire**, en fonction de α et β, une équation de la tangente (T) en M à (E).

b- **Déterminer** les points M pour que (T) passe par le point $K\left(\frac{9}{2}\,;0\right)$.

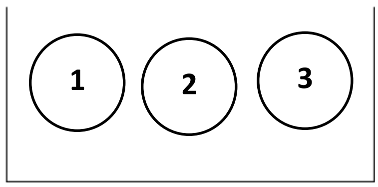
6)
- (D) la parallèle menée de F à l'axe des ordonnées.
- (D) coupe (E) en A et (D) coupe (P) en B $\left(y_A > 0 \text{ et } y_B > 0\right)$.
- H est le projeté orthogonal de B sur (d) et F' est le deuxième foyer de (E).

Montrer que : $AF' - AB = 4$.

IV- (2,5 points)

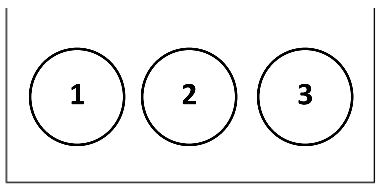
On considère les trois urnes **U, V et W** telles que:

- **U** contient trois boules numérotées 1, 2 et 3.



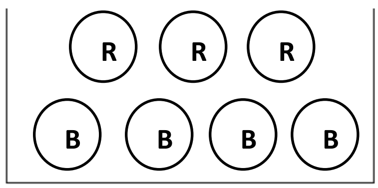
U

- **V** contient trois boules numérotées 1, 2 et 3.



V

- **W** contient sept boules dont trois sont rouges et quatre sont bleues.



W

Partie A

On tire au hasard une boule de **U** et une boule de **V**.

On désigne par **X** la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des deux nombres portés par les deux boules tirées.

1) **Vérifier** que les trois valeurs possibles de **X** sont **0; 1 et 2**.
2) **Montrer** que la probabilité $P(X=2)=\frac{2}{9}$.
3) **Déterminer** la loi de probabilité de **X**.

Partie B

On tire au hasard une boule de U et une boule de V.

Si la valeur absolue de la différence des deux nombres portés par les deux boules tirées est 2, alors on tire au hasard et **simultanément** trois boules de W. Sinon, on tire au hasard, **successivement** et **avec remise**, trois boules de W.

On considère les évènements:

E: " La valeur absolue de la différence des deux nombres portés par les deux boules tirées de U et de V est 2 "

F: " Les trois boules tirées de W sont rouges "

1) a- **Montrer** que $P(F/E) = \dfrac{1}{35}$

   b-**Calculer** $P(F \cap E)$.

2) **Montrer** que $P(F) = \dfrac{149}{2205}$.

3) Sachant que l'une au moins des trois boules tirées de **W** est bleue

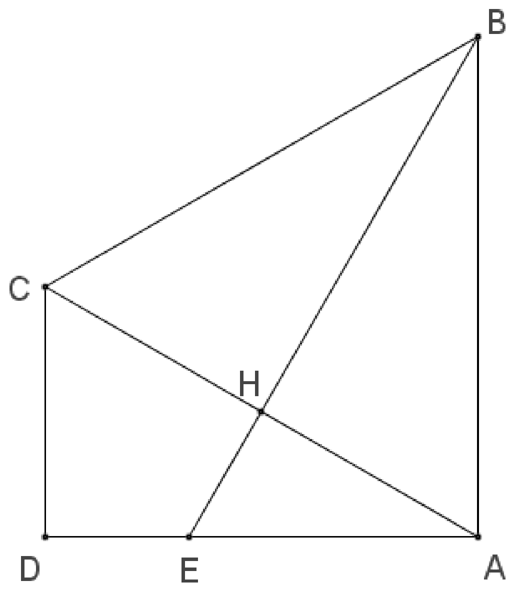
   Calculer la probabilité pour que la valeur absolue de la différence des deux nombres portés par les deux boules tirées est **2**.

V- (3 points)

Dans la figure ci-dessous.

- $ABCD$ est un trapèze rectangle tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$
- ABC est un triangle équilatéral direct de côté 2.
- H le milieu de $[AC]$
- E le point d'intersection de (BH) et (AD).

On désigne par S la similitude plane directe qui transforme B en A et A en E.



1) a- **Montrer** que $\frac{\sqrt{3}}{3}$ est le rapport de S (on peut utiliser $\tan \widehat{EBA}$)

   b- **Vérifier** que $-\frac{\pi}{2}$ est un angle de S.

2) a- **Vérifier** que S(BE) = (AC)

   b- **Déterminer** $S(AC)$.

   c- **Déduire** que H est le centre de S.

3) Soit (Δ) la perpendiculaire en E à (AD).

   (Δ) coupe (AC) en F.

   La parallèle menée de $\mathbf{C}$ à $(\mathbf{AD})$ coupe $(\boldsymbol{\Delta})$ en **L**.

   Démontrer que $S(E) = F$ et que $S(D) = L$.

4) On considère la similitude plane directe S' de centre **B**, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

a- **Déterminer** le rapport et un angle de $S \circ S'$.

b- **Déterminer** $S \circ S'(B)$.

c- **Démontrer** que **E** est le centre $S \circ S'$.

VI- (7 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 2e^{2x} - 2$.

Partie A

Soit $y = z + 2xe^{2x} + 1$

1) **Former** une équation différentielle (E_1) satisfaite par z.
2) **a- Résoudre** (E_1)

   b- Déduire la solution générale de (E).
3) **Déterminer** la solution particulière de (E) telle que $y(0) = 0$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$.

1) a- **Calculer** $g'(x)$

   b- **Dresser** le tableau de variations de g (On ne demande pas de trouver les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$).
2) **Déduire** le signe de $g(x)$.

Partie C

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 2 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a- **Déterminer** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

   b- **Déduire** que f est continue en $x = 0$.

2) a- **Déterminer** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

   b- **Déduire** une asymptote à (C).

3) **Déterminer** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

4) a- **Déterminer** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-2}{x}$.

   b- En **déduire** que la droite (T) d'équation y = 2x + 2 est tangente à (C) au point d'abscisse 0.

5) a- **Vérifier** que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x \neq 0$.

   b- **Dresser** le tableau de variations de f sur ℝ.

6) **Tracer** (T) et (C).

7) a- **Montrer** que f admet sur ℝ une fonction réciproque h.

   b - **Déterminer** le domaine de définition de h.

   c- **Tracer** (C'), la courbe représentative de h, dans le même repère que (C).

8) (L) est la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

   Calculer les coordonnées du point d'intersection de (L) et (C').