وزارة التربية والتعليم العالي المديريّة العامة للتربية دائرة الامتحانـات الرسمية	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع العلوم العامة	دورة الـعام ٢٠١٨ الاستثنائيّة السبت ٤ آب ٢٠١٨
عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (2,5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les deux droites (D) et (D') définies par:

$$(D):\begin{cases} x=\lambda+1 \\ y=0 \\ z=\lambda+3 \end{cases} \quad (\lambda\in\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (D'):\begin{cases} x=t \\ y=3t-3 \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

1) Montrer que (D) et (D') sont non coplanaires.
2) On désigne par (P) le plan contenant (D') et parallèle à (D).
   Montrer qu'une équation de (P) est : $x-z=0$.
3) Ecrire une équation du plan (Q) contenant (D) et perpendiculaire à (P).
4) Vérifier que A(1 ; 0 ; 1) est le point d'intersection de (D') et (Q).
5) a- Déterminer les coordonnées du point B projeté orthogonal de A sur (D).
   b- Soit C(1 ; 0 ; 3) un point de (D). Vérifier que le triangle ABC est rectangle isocèle.
6) Déterminer les coordonnées des points M de (D') pour que le volume du tétraèdre MABC soit égal à 2 unités de volume.

II- (2 points)

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier $n\geq 1$, par : $I_n=\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$.

1) Montrer que $I_n\geq 0$.
2) Montrer que $I_{n+1}\leq I_n$ et déduire le sens de variations de (I_n).
3) Justifier que la suite (I_n) est convergente.
4) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que: $I_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)I_n$.
5) a- En utilisant les deux parties 2) et 4), montrer que $I_n\leq\frac{1}{ne}$.
   b- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

III- (3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

(E) est l'ellipse d'équation : $5x^2 + 9y^2 = 45$

(P) est la parabole de foyer le point F $(-2\ ;\ 0)$ et de directrice la droite (d) d'équation $x = -4$.

1) Vérifier qu'une équation de (P) est $y^2 = 4x + 12$.
2) Pour $x \geq -3$, calculer les coordonnées du point d'intersection de (E) et (P).
3) a- Déterminer les coordonnées des quatre sommets de (E).
   b- $F(-2\ ;\ 0)$ est l'un des foyers de (E).
   Ecrire une équation de la directrice (Δ) de (E) associée à F.
4) Tracer (E) et (P) en précisant les points d'intersection de (P) avec la droite d'équation x = 1.
5) Soit $M(\alpha\ ;\ \beta)$ un point de (E).
   a- Ecrire, en fonction de α et β, une équation de la tangente (T) en M à (E).
   b- Déterminer les coordonnées des points M pour que (T) passe par le point $K\left(\frac{9}{2}\ ;\ 0\right)$.
6) On désigne par (D) la parallèle menée de F à l'axe des ordonnées.
   (D) coupe (E) en A et (D) coupe (P) en B $\left(y_A > 0 \text{ et } y_B > 0\right)$.
   H est le projeté orthogonal de B sur (d) et F' est le deuxième foyer de (E).
   Montrer que : $AF' - AB = 4$.

IV- (2,5 points)

On considère les trois urnes U, V et W telles que:

- U contient trois boules numérotées 1, 2 et 3.
- V contient trois boules numérotées 1, 2 et 3.
- W contient sept boules dont trois sont rouges et quatre sont bleues.

Partie A

On tire au hasard une boule de U et une boule de V.

On désigne par X la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des deux nombres portés par les deux boules tirées.

1) Vérifier que les valeurs possibles de X sont 0; 1 et 2.
2) Montrer que la probabilité $P(X = 2) = \frac{2}{9}$.
3) Déterminer la loi de probabilité de X.

Partie B

On tire au hasard une boule de U et une boule de V.

Si la valeur absolue de la différence des deux nombres portés par les deux boules tirées est 2, alors on tire au hasard et simultanément trois boules de W. Sinon, on tire au hasard, successivement et avec remise, trois boules de W.

On considère les évènements:

E: " La valeur absolue de la différence des deux nombres portés par les deux boules tirées de U et de V est 2 "

F: " Les trois boules tirées de W sont rouges "

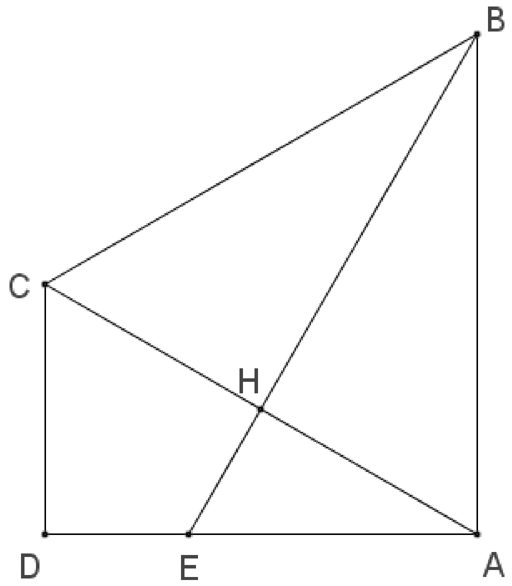
1) Montrer que $P(F/E) = \frac{1}{35}$, puis calculer $P(F \cap E)$.
2) Montrer que $P(F) = \frac{149}{2205}$.
3) Sachant que l'une au moins des trois boules tirées de W est bleue, calculer la probabilité pour que la valeur absolue de la différence des deux nombres portés par les deux boules tirées de U et de V est 2.

V- (3 points)

Dans la figure ci-dessous,

- ABCD est un trapèze rectangle tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$
- ABC est un triangle équilatéral direct de côté 2
- H est le milieu de [AC]
- E est le point d'intersection de (BH) et (AD).

On désigne par S la similitude plane directe qui transforme B en A et A en E.



1) a- Montrer que $\frac{\sqrt{3}}{3}$ est le rapport de S (on peut utiliser $\tan \widehat{EBA}$).

   b- Vérifier que $-\frac{\pi}{2}$ est un angle de S.

2) a- Vérifier que l'image de la droite (BE) par S est la droite (AC), puis déterminer l'image de la droite (AC) par S.

   b- Déduire que H est le centre de S.

3) Soit (Δ) la perpendiculaire en E à (AD).

   (Δ) coupe (AC) en F.

   La parallèle de C à (AD) coupe (Δ) en L.

   Démontrer que $S(E) = F$ et que $S(D) = L$.

4) On considère la similitude plane directe S' de centre B, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

   a- Déterminer le rapport et un angle de $S \circ S'$.

   b- Déterminer $S \circ S'(B)$.

   c- Démontrer que E est le centre $S \circ S'$.

VI- (7 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 2e^{2x} - 2$.

Partie A

Soit $y = z + 2xe^{2x} + 1$

1) Former une équation différentielle (E_1) satisfaite par z.
2) Résoudre (E_1) et déduire la solution générale de (E).
3) Déterminer la solution particulière de (E) telle que $y(0) = 0$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur ℝ par : $g(x) = (2x-1)e^{2x} + 1$.

1) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g (On ne demande pas de trouver les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$).
2) Déduire le signe de g(x).

Partie C

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 2 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. En déduire que f est continue en x = 0.
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).
3) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
4) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-2}{x}$.

   b- En déduire que la droite (T) d'équation y = 2x + 2 est tangente à (C) au point d'abscisse 0.
5) a- Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x \neq 0$.

   b- Dresser le tableau de variations de f sur ℝ.
6) Tracer (T) et (C).
7) a- Montrer que f admet sur ℝ une fonction réciproque h dont on déterminera son domaine de définition.

   b- Tracer (C'), la courbe représentative de h, dans le même repère que (C).
8) (L) est la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

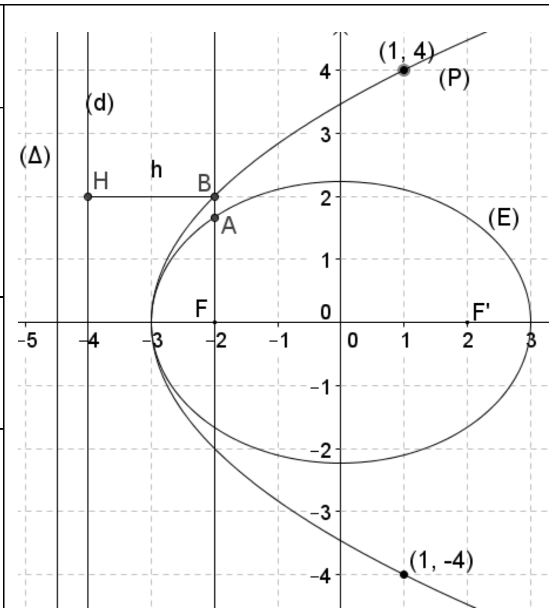
   Calculer les coordonnées du point d'intersection de (L) et (C').

عدد المسائل: ست

أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

QI	Réponses	M
1	$\vec{V}(1;0;1)$ est un vecteur directeur de (D) et $\vec{V'}(1;3;1)$ est un vecteur directeur de (D'). $I(1;0;3)\in(D)$ et $J(0;-3;0)\in(D')$. $\vec{IJ}.\left(\vec{V}\wedge\vec{V'}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -3 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-6$ Alors ces deux droites sont non coplanaires.	1
2	$\vec{JM}.\left(\vec{V}\wedge\vec{V'}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x & y+3 & z\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$ alors $x-z=0$	1
3	$\vec{IM}.\left(\vec{V}\wedge\vec{N_P}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y & z-3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=0$ alors $(Q): y=0$	1
4	Remplacer (D') dans (Q). $3t-3=0\Leftrightarrow t=1$. Alors A(1 ; 0 ; 1).	0,5
5a	$\vec{AB}(\lambda,0,\lambda+2)$ avec $\vec{AB}.\vec{V}=0$. Alors $\lambda=-1$ et $B(0,0,2)$	0,5
5b	$\vec{AB}(-1,0,1);\vec{BC}(1,0,1)$ mais $\vec{AB}.\vec{BC}=0$ et $AB=BC$ alors ABC est rectangle isocèle.	0,5
6	$v=\frac{1}{3}\times\text{distance}(M,\ (Q))\times\text{Aire}(\Delta ABC)$ alors $2=\frac{1}{3}\lvert 3t-3\rvert\times 1$ par suite $t=3$ ou $t=-1$ $M(-1,-6,-1)$ ou $M(3,6,3)$ **OU**: $\frac{1}{6}\left\lvert\vec{AM}.\left(\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right)\right\rvert=2$, alors …	0,5

QII	Réponses	M
1	$1\le x\le e, 0<\ln x\le 1$ et $\frac{(\ln x)^n}{x^2}\ge 0$ alors $I_n\ge 0$	1
2	$I_{n+1}-I_n=\int_1^e\frac{(\ln x)^n(\ln x-1)}{x^2}dx<0$	1
3	(I_n) est décroissante et minorée par 0, alors elle est convergente.	0,5
4	$I_{n+1}=\int_1^e\frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}dx$ Soit $u'=\frac{1}{x^2}$ et $v=(\ln x)^{n+1}$; $I_{n+1}=\left[-\frac{1}{x}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e+(n+1)\int_1^e\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$	0,5
5-a	$I_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)I_n\le I_n$ alors $I_n\le\frac{1}{ne}$	0,5
5-b	$0\le I_n\le\frac{1}{ne}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	0,5

<table>
<tr><th>QIII</th><th colspan="3">Réponses</th><th>M</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">$\frac{MF}{d(M \to (d))} = 1$ alors $(x+2)^2 + y^2 = (x+4)^2$ donc $y^2 = 4x + 12$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">$5x^2 + 9(4x+12) = 45$ alors $x' = \frac{-21}{5}$ à rejeter ou $x'' = -3$ acceptable. le point est : (-3,0)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3-a</td><td>Les sommets de (E) sont $(-3,0),(3,0),\left(0,\sqrt{5}\right),\left(0,-\sqrt{5}\right)$</td><td>1</td><td rowspan="4">
</td><td rowspan="4">1</td></tr>
<tr><td>3-b</td><td>$a = 3, b = \sqrt{5}, c = 2$ avec O(0,0) le centre, donc $F(-2,0)$. La directrice associée à F est (Δ) d'équation $x = \frac{-9}{2}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>5-a</td><td>La tangente en M à (E) est (T): $\frac{\alpha x}{9} + \frac{\beta y}{5} = 1$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>5-b</td><td>Remplacer les coordonnées $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ dans l'équation de (T), alors $\alpha = 2$ et $\left(\beta = \frac{5}{3} \text{ ou } \beta = \frac{-5}{3}\right)$. Donc $M(2, \frac{5}{3})$ ou $M(2, \frac{-5}{3})$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3">B appartient à la parabole, alors BF=BH, A appartient à l'ellipse, alors $AF + AF' = 6$
$AF' - AB = 6 - AB - (BH - AF)$. Donc $AF' - AB = 4$</td><td>0,5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>QIV</th><th colspan="4">Réponses</th><th>M</th></tr>
<tr><td>A1</td><td colspan="4">X (Ω) ={ 0, 1, 2, 3}
X=0: (1,1), (2,2), (3,3)
X=1: (2,1), (1,2), (3,2), (2,3)
X=2: (3,1), (1,3)

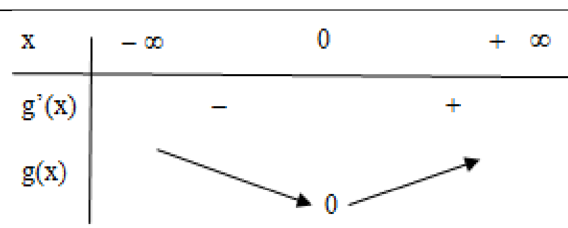
	1	2	3
1	0	1	2
2	1	0	1
3	2	1	0

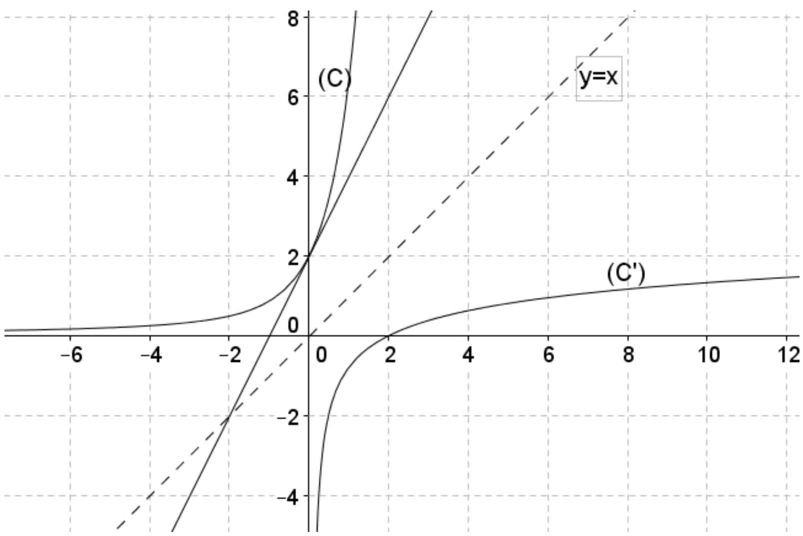
</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>$P(X=2) = \frac{2}{9}$</td><td>1</td><td>A3</td><td>

x_i	0	1	2	Total
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>$P\left(F/E\right) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$; $P(F \cap E) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{35}$</td><td>1</td><td>B2</td><td>$P(F) = \frac{2}{315} + \frac{7}{9} \times \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{149}{2205}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B3</td><td colspan="4">$P\left(E/\overline{F}\right) = \frac{P(E \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{\frac{2}{9} \times \frac{34}{35}}{1 - \frac{149}{2205}} = \frac{119}{514}$</td><td>0,5</td></tr>
</table>

QV	Réponses	M
1-a	$k = \frac{AE}{AB} = \tan EBA = \tan 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0,5
1-b	$\alpha = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AE}) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$	0,5
2-a	S(BE) est une droite perpendiculaire a (BE) et passant par A, alors S(BE) = (AC) De même, S(AC) = (BE)	1
2-b	$\{H\} = (AC) \cap (BE)$, alors $\{S(H)\} = (BE) \cap (AC)$ Donc S(H) = H. (Invariant). Par suite H est le centre de S	1
3	Le triangle EHF est semi-équilatéral avec $H = 90^o$ et $E = 30^o$ Donc $HF = \frac{\sqrt{3}}{3} HE$ et $\left(\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HF}\right) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$. Alors S(E) = F **OU:** $E = (BH) \cap (AD), S(E) = (AH) \cap (EF) = F$ S(A) = E , et $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EL}\right) = \frac{-\pi}{2}$ et $\frac{EL}{AD} = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ alors S(D)=L	1
4a	Le rapport est: $\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$ et un angle est $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$	0,5
4b	$S \circ S'(B) = S(B) = A$	0,5
4c	$\frac{EA}{EB} = \frac{1}{2}$ and $\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}\right) = -\frac{\pi}{3}$ (Triangle ABE est semi-équilatéral). Donc E est le centre de $S \circ S'$.	1

QVI	Réponses	M
A-1	$y = z + 2xe^{2x} + 1$ et $y' = z' + 2e^{2x} + 4xe^{2x}$. Substituer dans E.D.: $y' - 2y = 2e^{2x} - 2$ alors (E’) : z’ – 2z = 0 .	1
A-2	$z = Ce^{2x}$ et $y = Ce^{2x} + 2xe^{2x} + 1$.	1
A-3	 y(0) = 0 . alors C = –1 et $y = (2x - 1)e^{2x} + 1$.	0,5
B-1	$g'(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x}(2x - 1) = 4xe^{2x}$	1,5
B-2	La valeur minimale de g(x) est 0, alors g(x) ≥ 0.	1
C-1	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \frac{0}{0}$ F.I. RH $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = 2 = f(0)$ alors f est continue en x = 0	1
C-2	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ alors al droite y = 0 (x'x) est une asymptote a (C).	1

C-3	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ F.I. (HR) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$	1
C-4-a	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{f(x)-2}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{f(x)-2}{x} = 2$.	0,5
C-4-b	(T): $y-2 = 2(x-0)$ car $f'(0) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)-2}{x}$	0,5
C-5-a	$f'(x) = \dfrac{2e^{2x}.x - e^{2x} + 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$	0,5
C-5-b	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$	1
C-6		1
C-7-a	Sur $]-\infty,+\infty[$ f est continue et strictement croissante, alors elle admet une fonction réciproque h.	1
C-7-b	(C') est symétrique de (C) par rapport à $y = x$	0,5
C-8	$(L)\cap(C): \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \dfrac{1}{x}$; $e^{2x} = 2$, alors $2x = \ln 2, x = \dfrac{\ln 2}{2}$ $(\dfrac{\ln 2}{2}, \dfrac{2}{\ln 2})$ alors (C') coupe (L) en $(\dfrac{2}{\ln 2}, \dfrac{\ln 2}{2})$	1