| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل: ست | مسابقة في مادة الرياضيات | الاسم: |
| | المدة: أربع ساعات | الرقم: |

**ملاحظة:** - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه ( دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

**I-(علامتان ونصف)**

في الفضاء الاحداثي العائد للنظام $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نفترض المستقيمان $(D)$ و $(D')$ المعرّفان بالمعادلات التالية:

$$(D')\begin{cases} x = t \\ y = 3t-3 \ (t\in\mathbb{R}) \\ z = t \end{cases} \quad و \quad (D)\begin{cases} x = \lambda+1 \\ y = 0 \qquad (\lambda\in\mathbb{R}) \\ z = \lambda+3 \end{cases}$$

١) برهن أن $(D)$ و $(D')$ هما مستقيمين متخالفين.
٢) ليكن $(P)$ المستوي الذي يحتوي المستقيم $(D')$ ومواز للمستقيم $(D)$.
برهن أن معادلة $(P)$ هي : $x-z=0$ .
٣) اكتب معادلة المستوي $(Q)$ الذي يحتوي المستقيم $(D)$ ويتعامد على المستوي $(P)$.
٤) برهن أن $A(1\,;\,0\,;\,1)$ هي نقطة التقاطع بين المستقيم $(D')$ والمستوي $(Q)$.
٥) أ) جد احداثيات النقطة $B$ الاسقاط العامودي للنقطة $A$ على المستقيم $(D)$.
ب) لتكن $C(1\,;\,0\,;\,3)$ نقطة على المستقيم $(D)$.
برهن أن المثلث $ABC$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين.
٦) جِد إحداثيات النقطتين $M$ الموجودتين على المستقيم $(D')$ حيث يكون حجم الهرم $MABC$ يساوي وحدتين مكعبتين.

**II- (علامتان)**

لتكن $\left(I_n\right)$ المتتالية المعرّفة، لكل عدد صحيح $n$ حيث $n\geq 1$ ، كما يلي: $I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$ .

١) برهن أن $I_n \geq 0$ .
٢) برهن أن $I_{n+1}\leq I_n$ ثم استنتج تغيّر المتتالية $\left(I_n\right)$ .
٣) برر أن المتتالية $\left(I_n\right)$ هي تقاربية.
٤) استخدم التكامل بالتجزئة لتبرهن أن $I_{n+1} = -\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n$ .
٥) أ) برهن باستخدام الاسئلة ٢) و ٤) أن $I_n \leq \dfrac{1}{ne}$ .
ب) جِد $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ .

**III- (٣ علامات)**

في المستوى الاحداثي $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$، ليكن القطع الناقص (E) ذو المعادلة $5x^2 + 9y^2 = 45$ و القطع المكافئ (P) ذو البؤرة $F(-2\,;\,0)$ والدليل (d) ذو المعادلة $x = -4$ .

١) تحقق من ان معادلة (P) هي $y^2 = 4x + 12$ .

٢) لكل $x \geq -3$ ، احسب احداثيات نقطة التقاطع بين (E) و (P).

٣) أ) جد احداثيات الرؤوس الاربعة للقطع الناقص (E) .

ب) النقطة $F(-2;0)$ هي إحدى بؤر (E).

اكتب معادلة $(\Delta)$ دليل (E) التابع لـF.

٤) ارسم (E) و (P) محددا نقاط التقاطع بين (P) والمستقيم ذي المعادلة $x = 1$.

٥) لتكن $M(\alpha,\beta)$ نقطة على (E).

أ) اكتب ، بدلالة $\alpha$ و $\beta$ ، معادلة (T) المماس لـ (E) عند النقطة M.

ب) جد النقطتين M عندما يمر (T) بالنقطة $K\left(\frac{9}{2},0\right)$.

٦) ليكن (D) المستقيم الذي يمر بالنقطة F موازياّ للمحور-y.

(D) يتقاطع مع (E) عند النقطة A ويتقاطع مع (P) عند النقطة B حيث أن $y_A > 0$ 0 $_B >$ .

لتكن H الاسقاط العامودي للنقطة B على المستقيم (d) و النقطة ’F البؤرة الثانية لـ (E).

برهن أن $AF' - AB = 4$ .

**IV- (علامتان ونصف)**

نفترض ثلاثة صناديق U و V و W على الشكل التالي:

- يحتوي الصندوق U على ثلاثة طابات تحمل الارقام 1 و 2 و3.
- يحتوي الصندوق V على ثلاثة طابات تحمل الارقام 1 و 2 و3.
- يحتوي الصندوق W على سبع طابات: ثلاث طابات حمراء اللون و اربع طابات زرقاء .

**القسم الاول**

نسحب عشوائياّ طابة واحدة من الصندوق U و طابة واحدة من الصندوق V.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يساوي القيمة المطلقة للفرق بين الرقمين الموجودين على الطابتين المسحوبتين.

١) برر أن القيم الثلاث الممكنة لـ X هي: 0 و 1 و2 .

٢) برهن أن $P(X=2) = \frac{2}{9}$.

٣) جد التوزيع الاحتمالي لـ X.

**القسم الثاني**

نقوم عشوائياّ بسحب طابة من الصندوق U وطابة من الصندوق V .

اذا كانت القيمة المطلقة للفرق بين الرقمين الموجودين على الطابتين المسحوبتين تساوي 2، فإننا نسحب عشوائياّ ثلاث طابات معاّ من الصندوق W. غير ذلك، نسحب عشوائياّ ثلاث طابات بشكل متتالٍ مع إرجاع من الصندوق W.

لنفترض الاحداث التالية:

E: « القيمة المطلقة للفرق بين الرقمين الموجودين على الطابتين المسحوبتين من U و V تساوي 2 »

F: «الطابات الثلاث المسحوبة من الصندوق W حمراء اللون»

١) برهن أن $P(F/E) = \frac{1}{35}$ ثم احسب $P(F \cap E)$ .

٢) برهن أن $P(F) = \frac{149}{2205}$ .

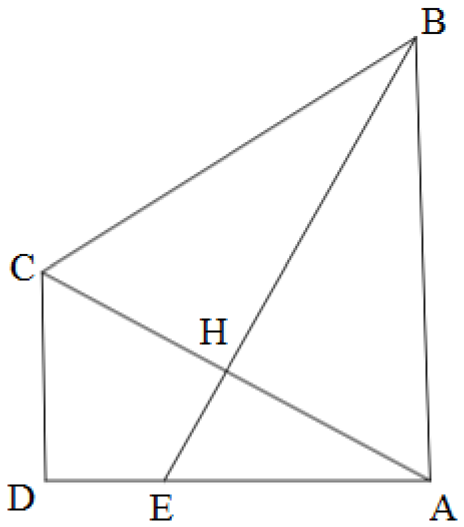
٣) علماّ أن طابة واحدة على الاقل من الطابات الثلاث المسحوبة من الصندوق W هي زرقاء اللون، احسب احتمال ان تكون القيمة المطلقة للفرق بين الرقمين الموجودين على الطابتين المسحوبتين من U و V تساوي 2.

**V- ( ٣ علامات)**

في الرسم أدناه:

- ABCD شبه منحرف قائم الزاوية حيث أن: $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$
- ABC هو مثلث موجّه متساوي الاضلاع ، طول ضلعه 2.
- النقطة H هي نقطة المنتصف لـ [AC].
- E هي نقطة التقاطع بين المستقيمين (BH) و (AD).

ليكن S التشابه الذي يحوّل B الى A ويحوّل A الى E.




١) أ) برهن أن نسبة التشابه لـ S هي $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (يمكنك استخدام $\tan E\hat{B}A$ )

ت) برهن أن $-\frac{\pi}{2}$ هي زاوية لهذا التشابه.

٢) أ) تحقق من ان صورة المستقيم (BE) بواسطة S هي المستقيم (AC)، ثم جد صورة المستقيم (AC) بواسطة S.

ب)استنتج أن H هي مركز التشابه S.

٣) ليكن (Δ) المستقيم العامودي على (AD) عند النقطة E. يتقاطع (Δ) مع (AC) عند النقطة F.

المستقيم الموازي لـ (AD) عند النقطة C يتقاطع مع (Δ) عند النقطة L.

برهن أن $S(E)=F$ وأن $S(D)=L$.

٤) لنفترض التشابه 'S ذو المركز B والنسبة $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاوية $\frac{\pi}{6}$.

أ) جِد نسبة وزاوية $S\circ S'$.

ب) جِد $S\circ S'(B)$

ت) برهن أن E هي مركز $S\circ S'$.

**VI- ( ٧ علامات)**

لتكن (E) المعادلة التفاضلية التالية: $y' - 2y = 2e^{2x} - 2$

**القسم الأول**

لتكن $y = z + 2xe^{2x} + 1$

١) اكتب المعادلة التفاضلية $(E_1)$ المحققة بواسطة z.
٢) حلّ $(E_1)$ ثم استنتج الحل العام للمعادلة (E).
٣) جِد الحل الخاص للمعادلة (E) حيث $y(0) = 0$ .

**القسم الثاني**

لتكن الدالّة g المعرَّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2x-1)e^{2x} + 1$ .

١) احسب $g'(x)$ و انشىء جدول التغيّر للدالة g.( من غير المطلوب حساب نهايات الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$ )
٢) استنتج إشارة $g(x)$.

**القسم الثالث**

نفترض الدالّة f المعرَّفة على $\mathbb{R}$ على الشكل التالي: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ ، ولنرمز بالحرف (C) إلى بيان هذه الدّالّة في المستوي الإحداثي $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

١) احسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ . استنتج أن الدالة f متصلة عند $x = 0$ .

٢) جِد $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ثم استنتج معادلة المقارب لـ (C).

٣) جِد $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ .

٤) أ) جِد $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 2}{x}$

ب) استنتج ان المستقيم (T) ذا المعادلة $y = 2x+2$ هو المماس للبيان (C) عند النقطة ذات $x = 0$.

٥) أ) تحقق من أن $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ لكل $x \neq 0$ .

ب) انشىء جدول التغير للدالة f على $\mathbb{R}$ .

٦) أرسم المستقيم (T) والبيان (C) .

٧) أ) برهن أن، على $\mathbb{R}$ ، للدالة f دالة عكسية اسمها h من المطلوب إيجاد مجالها.

ب) أرسم (C') ، البيان العائد للدالة h في نفس المستوى الاحداثي للبيان (C).

٨) ليكن (L) البيان المعرّف بالمعادلة $y = \dfrac{1}{x}$ . احسب احداثيات نقاط التقاطع بين (L) و (C').