ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

I- (4 points)

Le tableau ci-dessous donne le nombre de télévisions demandées en fonction du prix de vente d'une télévision en centaines de milliers LL:

Le prix de vente d'une télévision en **centaines de milliers** LL (x_i)	8	9	10	11	13	15
Nombre de télévisions demandées (y_i)	25	22	20	16	10	7

Toutes les réponses seront arrondies à 10^{-1} près.

1) a- Calculer les coordonnées du point moyen $G(\bar{x}\ ;\ \bar{y})$.
   b- Représenter le nuage des points (x_i ; y_i) dans un repère orthogonal et placer le point moyen G.
   c- Déterminer une équation de la droite de régression ($D_{y/x}$) et la tracer dans le repère précédent.
2) Calculer le pourcentage de diminution du nombre de télévisions demandées lorsque le prix de vente d'une télévision augmente de 900 000 LL jusqu'à 1 300 000 LL.
3) On suppose que le modèle précédent reste valable pour un prix de vente inférieur ou égal à 1 700 000 LL. Estimer le nombre de télévisions demandées pour un prix de 1 590 000 LL.
4) a- Vérifier que l'élasticité de la demande en fonction du prix x est donnée par $E(x)=\dfrac{2,7x}{2,7x-46,1}$.
   b- Calculer E(11) et donner une interprétation économique à la valeur ainsi trouvée.

II- (4 points)

Une enquête est menée sur les clients d'une entreprise de télécommunication qui ont acheté une seule ligne de téléphone mobile prépayée de type E ou F.
Après l'achat de la ligne téléphonique, un client peut ne pas souscrire à l'internet ou bien souscrire à l'internet en choisissant uniquement l'une des deux options A (500 mégabits) ou B (1,5 gega bits).
L'entreprise a constaté que :

- 60% des clients ont acheté chacun une ligne de type E ;
- Parmi les clients qui ont acheté chacun une ligne de type E :
  45% ont choisi l'option A, 35% ont choisi l'option B et 20% n'ont pas souscrit à l'internet ;
- Parmi les clients qui ont acheté chacun une ligne de type F, 55% ont choisi l'option A ;
- **18% des clients qui ont participé à l'enquête n'ont pas souscrit à l'internet.**

On interroge un client au hasard. On considère les évènements suivants :

E : « le client interrogé a acheté une ligne de type E » ; A : « le client interrogé a choisi l'option A » ;
B : « le client interrogé a choisi l'option B » ; C : « le client n'a pas souscrit à l'internet ».

1) Quelle est la probabilité que le client ait acheté une ligne de type F ?
2) a- Calculer la probabilité $P(C\cap E)$ et déduire que $P(C\cap \bar{E})=0,06$.
   b- Le client a acheté une ligne de type F. Calculer la probabilité que ce client n'ait pas souscrit à l'internet.
3) Le tarif mensuel d'une ligne de type E est 30 000 LL et d'une ligne de type F est 40 000 LL.
   En plus, l'option A coûte 10 000 LL et l'option B coûte 20 000 LL par mois.
   Soit X la variable aléatoire égale à la somme mensuelle payée par un client ayant participé à l'enquête.
   a- Compléter le tableau ci-contre représentant la loi de probabilité de X.
   b- Calculer E(X), l'espérance mathématique de X.
   c- Estimer, en LL, le revenu réalisé lors d'une vente de 100 000 lignes par l'entreprise.

$X=x_i$	30 000	40 000	50 000	60 000
$P(X=x_i)$			0,43	0,12

III- (4 points)

En 2 011, le nombre des étudiants d'une université était 3 000.

Chaque année académique, 12% des étudiants quittent l'université pour différentes raisons et 480 nouveaux étudiants s'inscrivent dans cette université.

Pour tout entier naturel n, on note U_n le nombre des étudiants dans cette université en (2 011 + n).

Ainsi $U_0 = 3\,000$.

1) Vérifier que $U_1 = 3\,120$.
2) Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0{,}88U_n + 480$.
3) On considère la suite (V_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $V_n = U_n - 4000$.
   a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b- Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = 4\,000 - 1\,000\,(0{,}88)^n$.
   c- Estimer le nombre d'étudiants dans cette université en 2 017.
4) Le profit réalisé par cette université en 2 017 était 3 535 000 000 LL.
   Dans le but de construire un laboratoire, l'université a décidé d'investir 10% du profit réalisé en 2 017 dans une banque à un taux d'intérêt annuel de 6% capitalisé mensuellement pour 5 ans. Calculer la valeur acquise à la fin de ces 5 ans d'investissement.

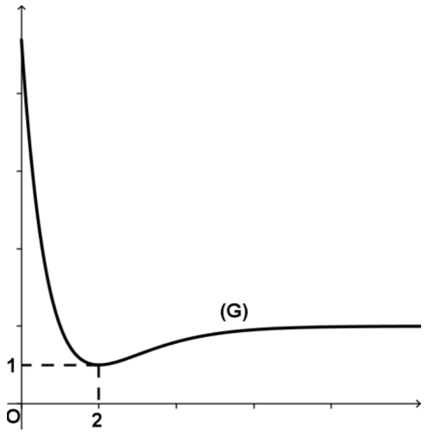
IV- (8 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 2x + 1 + xe^{-x+2}$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (d) la droite d'équation y = 2x + 1.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et calculer f(1).
2) a- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d) en précisant les coordonnées de leur point d'intersection.
   b- Montrer que (d) est une asymptote à (C).
3) a- Montrer que $f'(x) = 2 + (1 - x)e^{-x+2}$.
   b- La courbe (G) donnée ci-contre représente la fonction f'. Vérifier que $f'(x) > 0$ pour tout x dans $[0,+\infty[$.
   c- Dresser le tableau de variations de f.
4) La droite (D) d'équation y = 4x coupe la courbe (C) au point d'abscisse α. Montrer que 1,66 < α < 1,68.
5) Tracer (d), (D) et (C).



Partie B

On suppose dans ce qui suit que α = 1,67.

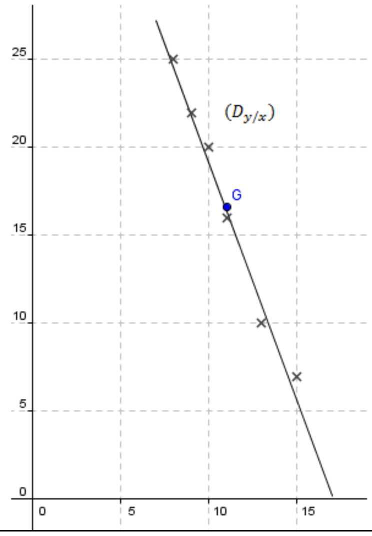
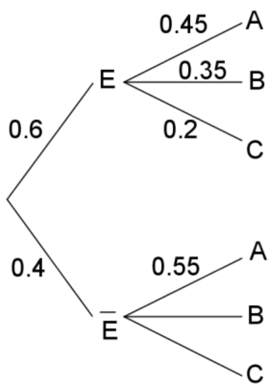
Une entreprise produit des montres. La fonction du coût moyen C_M est modélisée par $C_M(x) = 2 + \frac{1}{x} + e^{-x+2}$ pour tout $0 < x \leq 4$;

où x est le nombre de montres produites exprimé en centaines.

Les fonctions du coût total, coût moyen, revenu et profit ainsi que le prix unitaire sont exprimés en millions de LL.

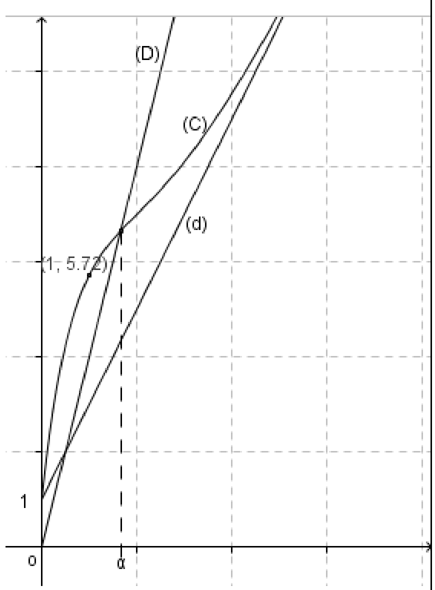
1) Calculer $C_M(3)$. Déduire, en LL, le coût moyen de production d'une montre parmi les 300 premières montres produites.
2) Vérifier que la fonction du coût total C_T est modélisée par $C_T(x) = f(x) = 2x + 1 + xe^{-x+2}$.
3) Sachant que toute la production est vendue, la fonction de revenu R est modélisée par R(x) = 4x.
   a- Déterminer le nombre minimal de montres à vendre pour que l'entreprise réalise un gain.
   b- 20% des montres vendues sont défectueuses. Chaque montre défectueuse est vendue pour 12 000 LL et chaque montre non défectueuse est vendue pour p LL. Montrer que p = 47 000.

أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

Q.I	Réponses	7 pts
1.a	$\overline{x} = 11$; $\overline{y} = 16{,}6$. G(11 ; 16,6)	0.5
1.b		1
1.c	$(D_{y/x})$: y = – 2,7x + 46,1	1
2	% de diminution = $\frac{22-10}{22}\times 100 = 54{,}5$	1
3	x = 15,9 , y = – 2,7(15,9) + 46,1 = 3,2 Donc c'est 3 télévisions	1.5
4.a	$E(x) = x\frac{y'}{y} = \frac{2{,}7x}{2{,}7x-46{,}1}$	1
4.b	E(11) = -1,8 A partir de 1 100 000 LL si le prix augmente de 1% la demande diminue de 1,8%	1
Q.II	**Réponses**	**7 pts**
		
1	$P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$	0.5
2.a	$P\left(C\cap E\right) = P(E)\times P(C/E) = 0{,}6\times 0{,}2 = 0{,}12$ $P\left(C\cap\overline{E}\right) = P(C) - P(C\cap E) = 0{,}18 - 0{,}12 = 0{,}06$	2
2.b	$P\left(C/\overline{E}\right) = \frac{P(C\cap\overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{0{,}06}{0{,}4} = 0{,}15$	1
3.a	$P(X = 30000) = P(C\cap E) = 0.12$ $P\left(X = 40000\right) = P(\overline{E}\cap C) + P(E\cap A) = 0.4\times 0.15 + 0.6\times 0.45 = 0.33$ Or P(X = 40000) = 1 – (0.12 + 0.43 + 0.33)	1.5
3.b	E(X) = 30000×0,12 + 40000×0,33 + 50000×0,43 + 60000×0,12 = 45500	1
3.c	Revenu = 45500×100000 = 4550000000 LL.	1

Q.III	Réponses	7 pts
1	$U_1 = (1 - 0{,}12)U_0 + 480 = 3120.$	0.5
2	$U_{n+1} = U_n - 0{,}12\ U_n = 0{,}88\ U_n + 480$	1
3.a	$V_{n+1} = U_{n+1} - 4000 = 0{,}88\ U_n - 3520$ $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{0{,}88\ Un - 3520}{U_n - 4000} = \frac{0{,}88(Un - 4000)}{U_n - 4000} = 0{,}88$ Alors(V_n) est une suite géométrique de raison 0,88 et de premier terme V_0 =–1000.	1.5
3.b	$V_n = -1000(0{,}88)^n$ alors $U_n = V_n + 4000 = -1000(0{,}88)^n + 4000$	1
43.c	n = 6, $U_n = -1000(0{,}88)^6 + 4000 = 3535{,}5$ Le nombre des étudiants en 2017 est 3535	1
4	Valeur acquise = $\frac{10}{100} \times 3535000000(1+\frac{0,06}{12})^{5\times 12} = 476818528{,}9LL$	2

Q.IV	Réponses	14 pts
A.1	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x + 1 + xe^{-x+2}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x + 1 + xe^{-x}e^{-2}) = +\infty + 1 + 0 = +\infty.$ $f(1) = 3 + e \approx 5{,}7$ **OU** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x + 1 + \frac{x}{e^x}e^2) = +\infty + 1 + 0 = +\infty.$	1
A.2.a	$f(x) - (2x+1) = xe^{-x+2}$; Si x = 0, alors la courbe (C) coupe la droite (d) en I(0 ; 1); Si x > 0, alors la courbe (C) est strictement au-dessus de la droite (d).	1.5
A.2.b	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\text{-}y) = \lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-x+2}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-x}e^{-2}) = 0$ Donc (d) est une asymptote à (C)	1
A.3.a	$f'(x) = 2 + e^{-x+2} - xe^{-x+2} = 2 + (1-x)e^{-x+2}$	0.5
A.3.b	D'après la figure la courbe (G) est strictement au-dessus de l'axe des abscisses alors$f'(x) > 0$ pour tour reel positif x **OU** 1 est la valeur minimale de $f'(x)$ alors $f'(x) > 0$	1
A3c	x : 0 … $+\infty$ f '(x) : + f(x) : 1 ↗ $+\infty$	1
A.4	f(1,66) = 6,65 > 4(1,66) = 6,64 et f(1,68) = 6,67 < 4(1,68) = 6,72 alrs 1,66 < α < 1,68 **OU** f(1,66) – 4(1,66) = 0,01 > 0 et f(1,68) – 4(1,68) = -0,04 < 0 alors 1,66 < α < 1,68	1

			A5	
B1	$C_M(3) = 2{,}701213$ Le coût moyen de production d'une montre parmi les 300 premières montres produites est $2{,}701213 \times \frac{1000000}{100} = 27012{,}13$ LL	2		1.5
B2	$C_T(x) = xC_M(x) = 2x + 1 + xe^{-x+2}$	0.5		
B3a	L'entreprise réalise un gain si R(x) > $C_T(x)$; 4x > f(x). Or d'après partie A5) la droite qui représente la fonction de revenu est au-dessus de la courbe (C) qui représente le coût total si 1,67≤x≤4. Par suite le seuil de rentabilité est réalisé si x = 1,67 en centaines des montres. Ainsi 167 montres. Donc le nombre minimal des montres à vendre pour que l'entreprise réalise un gain est 168 montres.	1.5		
B.3.b	$R(x) = 4x = \frac{(12000)(100)}{1000000}(x)\left(\frac{20}{100}\right) + \frac{(p)(100)}{1000000}(x)\left(\frac{80}{100}\right)$; 4 = 0,24+0,00008p; P = 47000.			1.5