عدد المسائل: اربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

مسابقة في مادة الرياضيات

المدة: ساعتان

(باللغة الفرنسيّة)

الاسم: ....

الرقم: ....

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les deux points A(0 ; 1 ; 2) et B(2 ; 0 ; 2) et le plan (P) d'équation x + 2y – 2 = 0.

1) Vérifier que les deux points A et B appartiennent au plan (P).
2) Démontrer qu'une équation du plan (Q) contenant la droite (AB) et perpendiculaire au plan (P)

   est $z-2=0$.
3) Soit (L) : $\begin{cases} x=t+2 \\ y=2t \\ z=2 \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$, la droite perpendiculaire au plan (P) en B.

   a- Montrer que la droite (L) est contenue dans le plan (Q).

   b- Soit E le point de (L) d'ordonnée positive.

   Déterminer les coordonnées du point E pour que le triangle ABE soit rectangle isocèle en B.

   c- Soit $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};2\right)$ le milieu de [EA]. On considère dans le plan (Q) le cercle (C) de centre I et passant

   par B. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (T) tangente à (C) en B.

II- (4 points)

Le département du service clientèle d'un supermarché organise un jeu pour offrir des bons d'achats à ses clients. Pour cela, une urne est placée à l'entrée de ce supermarché. L'urne contient :

- trois boules rouges portant chacune le nombre 10 000 ;
- deux boules blanches portant chacune le nombre 30 000 ;
- une boule noire portant le nombre $-10\,000$.

Le client qui décide de participer au jeu doit tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

On considère les évènements suivants :

A : « les trois boules tirées sont de même couleur »

B : « les trois boules tirées sont de trois couleurs différentes »

C : « parmi les trois boules tirées, deux seulement sont de même couleur ».

1) a- Calculer les probabilités P(A) et P(B).

b- Montrer que $P(C) = \dfrac{13}{20}$.

2) Le client qui participe au jeu reçoit un bon d'achat dont la valeur, en L.L, est égale à la somme des nombres portés par les trois boules tirées.

Soit X la variable aléatoire égale à la valeur d'un bon d'achat reçu par le client en LL.

a- Vérifier que les valeurs possibles de X sont : 10 000 ; 30 000 ; 50 000 et 70 000.

b- Montrer que $P(X = 50\,000) = \dfrac{7}{20}$.

c- Montrer que $P(X > 35000) = \dfrac{1}{2}$.

d- Sachant qu'un client a fait des achats avec le bon reçu dont la valeur est plus grande que

35 000 LL, calculer la probabilité qu'il ait tiré de l'urne exactement une boule rouge.

III- (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Pour tout point M du plan d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe z', tel que $z' = \frac{z-5i}{z}$

.

1) Ecrire z sous forme exponentielle dans le cas où $z' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

2) On désigne par E le point d'affixe z_E = 1.

   a- Vérifier que $z' - 1 = \frac{-5i}{z}$.

   b- Calculer EM′ lorsque OM = 5.

3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' sont des nombres réels.

   a- Montrer que $x' = \frac{x^2 + y^2 - 5y}{x^2 + y^2}$ et $y' = \frac{-5x}{x^2 + y^2}$.

   b- En déduire que, lorsque le point M' varie sur la droite d'équation $y = x$, le point M varie sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

IV- (8 points)

On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $1 - 2e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et calculer $f(-1)$.

2) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire une équation de l'asymptote (d) à (C).

b- Montrer que, pour tout réel x, (C) est en dessous de (d).

3) La courbe (C) coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en B.

Trouver les coordonnées des points A et B.

4) a- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

b- Tracer (C) et (d).

5) a- Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque g.

b- Déterminer le domaine de définition de g.

c- Vérifier que $g(x) = \ln(2) - \ln(1-x)$.

6) Soit (C′) la courbe représentative de g.

a- Déterminer une équation de la droite (T), tangente à (C′) en son point F d'abscisse 0.

b- Tracer (C′) et (T) dans le même repère que (C).

7) Calculer l'aire du domaine limité par (C′), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.