عدد المسائل: اربع	مسابقة في مادة الرياضيات	الاسم:
	المدة: ساعتان	الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les deux points A(0 ; 1 ; 2) et B(2 ; 0 ; 2) et le plan (P) d'équation x + 2y – 2 = 0.

1) Vérifier que les deux points A et B appartiennent au plan (P).
2) Démontrer qu'une équation du plan (Q) contenant la droite (AB) et perpendiculaire au plan (P) est $z-2=0$.
3) Soit (L) : $\begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t \\ z = 2 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$, la droite perpendiculaire au plan (P) en B.

   a- Montrer que la droite (L) est contenue dans le plan (Q).

   b- Soit E le point de (L) d'ordonnée positive.
   Déterminer les coordonnées du point E pour que le triangle ABE soit rectangle isocèle en B.

   c- Soit $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};2\right)$ le milieu de [EA]. On considère dans le plan (Q) le cercle (C) de centre I et passant par B. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (T) tangente à (C) en B.

II- (4 points)

Le département du service clientèle d'un supermarché organise un jeu pour offrir des bons d'achats à ses clients. Pour cela, une urne est placée à l'entrée de ce supermarché. L'urne contient :

- trois boules rouges portant chacune le nombre 10 000 ;
- deux boules blanches portant chacune le nombre 30 000 ;
- une boule noire portant le nombre –10 000.

Le client qui décide de participer au jeu doit tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne.
On considère les évènements suivants :

A : « les trois boules tirées sont de même couleur »
B : « les trois boules tirées sont de trois couleurs différentes »
C : « parmi les trois boules tirées, deux seulement sont de même couleur ».

1) a- Calculer les probabilités P(A) et P(B).

   b- Montrer que $P(C) = \frac{13}{20}$.

2) Le client qui participe au jeu reçoit un bon d'achat dont la valeur, en L.L, est égale à la somme des nombres portés par les trois boules tirées.
   Soit X la variable aléatoire égale à la valeur d'un bon d'achat reçu par le client en LL.

   a- Vérifier que les valeurs possibles de X sont : 10 000 ; 30 000 ; 50 000 et 70 000.

   b- Montrer que $P(X = 50\,000) = \frac{7}{20}$.

   c- Montrer que $P(X > 35000) = \frac{1}{2}$.

   d- Sachant qu'un client a fait des achats avec le bon reçu dont la valeur est plus grande que 35 000 LL, calculer la probabilité qu'il ait tiré de l'urne exactement une boule rouge.

III- (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Pour tout point M du plan d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe z', tel que $z' = \dfrac{z-5i}{z}$.

1) Ecrire z sous forme exponentielle dans le cas où $z' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.
2) On désigne par E le point d'affixe $z_E = 1$.

   a- Vérifier que $z' - 1 = \dfrac{-5i}{z}$.

   b- Calculer EM′ lorsque OM = 5.
3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' sont des nombres réels.

   a- Montrer que $x' = \dfrac{x^2 + y^2 - 5y}{x^2 + y^2}$ et $y' = \dfrac{-5x}{x^2 + y^2}$.

   b- En déduire que, lorsque le point M' varie sur la droite d'équation $y = x$, le point M varie sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

IV- (8 points)

On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $1 - 2e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et calculer $f(-1)$.
2) a- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire une équation de l'asymptote (d) à (C).

   b- Montrer que, pour tout réel x, (C) est en dessous de (d).
3) La courbe (C) coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en B.

   Trouver les coordonnées des points A et B.
4) a- Calculer f ′(x) et dresser le tableau de variations de f.

   b- Tracer (C) et (d).
5) a- Montrer que f admet sur ℝ une fonction réciproque g.

   b- Déterminer le domaine de définition de g.

   c- Vérifier que $g(x) = \ln(2) - \ln(1 - x)$.
6) Soit (C′) la courbe représentative de g.

   a- Déterminer une équation de la droite (T), tangente à (C′) en son point F d'abscisse 0.

   b- Tracer (C′) et (T) dans le même repère que (C).
7) Calculer l'aire du domaine limité par (C′), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات الرسمية

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: علوم الحياة

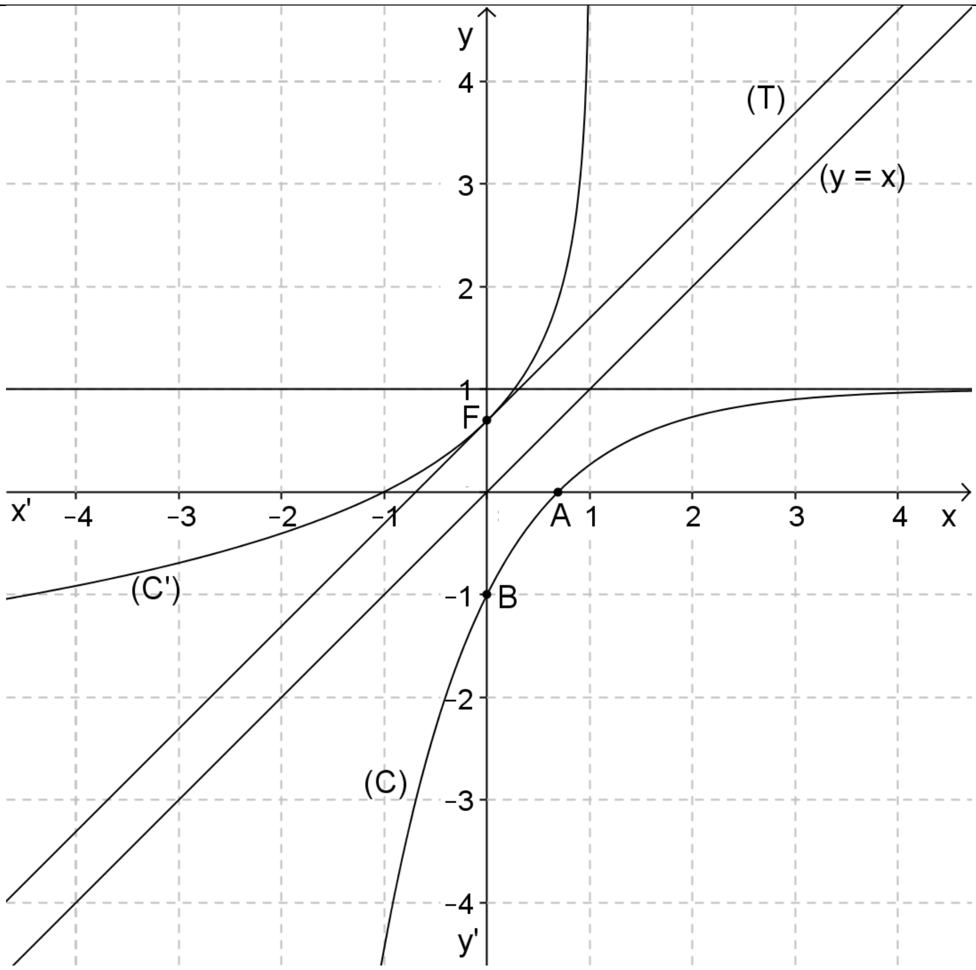
دورة العام ٢٠١٨ العاديّة
الأربعاء ٦ حزيران ٢٠١٨

أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

Q.I	Eléments de réponses	4 pts
1	$A \in (P)$: $(x_A) + 2(y_A) - 2 = 0$, $2(0) + 2(1) - 2 = 0$, $0 = 0$ De même $B \in (P)$.	0.5
2	$A \in (Q)$ … et $B \in (Q)$ … $\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{n_P} = (0)(1) + (0)(2) + (1)(0) = 0$.	0.5
3.a	$(L) \subset (Q)$ car $2 - 2 = 0$,	0.5
3.b	$E(t+2\ ;\ 2t\ ;\ 2)$, $AB = BE$ donc $\sqrt{5} = \sqrt{4t^2 + t^2}$ donc $t = 1$ ou $t = -1$, et par suite $E(3\ ;\ 2\ ;\ 2)$ acceptable ou $E(1\ ;\ -2\ ;\ 2)$ à rejeter.	1.5
3.c	Un vecteur directeur de (T) est : $\overrightarrow{IB} \wedge \overrightarrow{N_Q} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$. donc (T): $\begin{cases} x = \frac{3}{2}m + 2 \\ y = \frac{1}{2}m \\ z = 2 \end{cases}$ **Autre méthode :** ABE est rectangle isocèle en B donc (BI) est perpendiculaire à (AE) donc (T) // (AE) et passe par B.	1

Q.II	Eléments de réponses	4 pts
1.a	$P(A) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$, $P(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_6^3} = \frac{3}{10}$	0.5 0.5
1.b	$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{13}{20}$ ou $P(C) = \frac{C_3^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_4^1}{C_6^3} = \frac{13}{20}$	0.5
2.a	10 000 (RRN); 30 000 (RRR ou RBN); 50 000 (RRB ou BBN); 70 000 (RBB)	0.5
2.b	$P(X = 50\,000) = P(RRB) + P(BBN) = \frac{C_3^2 \times C_2^1 + C_2^2 \times C_1^1}{C_6^3} = \frac{7}{20}$	0.5
2.c	$P(X > 35\,000) = P(X = 50\,000) + P(X = 70\,000) = \frac{7}{20} + \frac{C_3^1 \times C_2^2}{C_6^3} = \frac{7}{20} + \frac{3}{20} = \frac{1}{2}$	1
2.d	$P(1 \text{ red} / x > 35\,000) = \frac{P(RBB)}{P(X>35\,000)} = \frac{\frac{C_3^1 \times C_2^2}{C_6^3}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{10}$	0.5

Q.III	Eléments de réponses	4 pts
1	$z = 5 + 5i = 5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	0.5
2.a	$z' - 1 = \frac{z-5i}{z} - 1 = -\frac{5i}{z}$	0.5
2.b	$OM = 5$ donc $\|z\| = 5$. $EM' = \|z' - 1\| = \left\|-\frac{5i}{z}\right\| = \frac{5}{\|z\|} = 1$.	1
3.a	$x' + iy' = \frac{x+iy-5i}{(x+iy)} \times \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x^2+y^2-5y-5ix}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-5y}{x^2+y^2} + i\frac{-5x}{x^2+y^2}$	1
3.b	$x' = y'$ donc $\frac{x^2+y^2-5y}{x^2+y^2} = \frac{-5x}{x^2+y^2}$ donc $x^2 + y^2 - 5y + 5x = 0$ donc M varie sur un cercle de centre $I(-\frac{5}{2}\ ;\ \frac{5}{2})$ et de rayon $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$	1

Q.IV	Eléments de réponses	8 pts
1	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. $f(-1) = 1 - 2e$.	0.5
2.a	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est une équation d'une asymptote horizontale à (C).	0.5
2.b	$f(x) - 1 = -2e^{-x} < 0$ donc (C) est au-dessous de (d)	0.5
3	A(ln2 ; 0) et B(0 ; –1)	0.5
4.a	$f'(x) = 2e^{-x} > 0$. $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & & & 1 \\ & -\infty & \nearrow & \end{array}$	1
4.b		1
5.a	f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	0.5
5.b	$D_g =]-\infty, 1[$	0.5
5.c	$y = f(x) = 1 - 2e^{-x}$, $e^{-x} = \frac{1-y}{2}$, $-x = \ln(\frac{1-y}{2})$, $x = \ln(\frac{2}{1-y}) = \ln 2 - \ln(1-y)$ Donc $g(x) = \ln 2 - \ln(1-x)$. Ou $f(g(x)) = x$, $1 - 2e^{-g(x)} = x$ donc $-g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{2}\right)$ donc $g(x) = \ln\left(\frac{2}{1-x}\right)$	1
6.a	F(0 ; ln2) , $g'(x) = \frac{1}{1-x}$ donc $g'(0) = 1$ donc (T) : $y = x + \ln 2$	0.5
6.b	Figure. (C') et (C) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.	0.5
7	$A = -\int_0^{\ln 2} f(x)dx = -[x + 2e^{-x}]_0^{\ln 2} = [\ln 2 + 2e^{\ln 0.5}] + [0 + 2]$ A = 1 – ln2 (unité d'aire).	1