ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

مسابقة في مادة الرياضيات

المدة: أربع ساعات

(باللغة الفرنسية)

الإسم : ....

الرقم : ....

I- (2 points)

Démontrer chacune des propositions suivantes :

1) Si $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ et $z' = \dfrac{iz}{\overline{z}}$ où $z \neq 0$, alors un argument de $\dfrac{z'}{z}$ est $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$

2) Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r $(r \neq 0)$, et (v_n) est la suite définie par:

   $v_n = e^{u_n}$, alors (v_n) est une suite géométrique de raison e^r.

3) Si $z = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ où $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, alors un argument de z est égale à 0.

4) $\displaystyle\int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}dx = \frac{(\arctan x)^3}{3} + c$.

II- (2 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les deux points

A(1 ; 0 ; 1) et B(-1 ; 2 ; 0) et les deux droites (L) et (D) d'équations paramétriques:

$(L): \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t - 1 \\ z = -2t + 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $(D): \begin{cases} x = 2 \\ y = m - 1 \\ z = -m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$.

1) **Ecrire** une équation cartésienne du plan (P) passant par les deux points A et B et parallèle à (D).

2) a- **Vérifier** que la droite (L) est contenue dans (P).

   b- **Montrer** que (L) est perpendiculaire à (AB) en A.

3) **Trouver** les coordonnées du point C(x,y,z) de (L) d'abscisse x < 0 tel que $AC = 6$.

4) Soit M (2 ; m-1 ; -m) un point variable de (D).

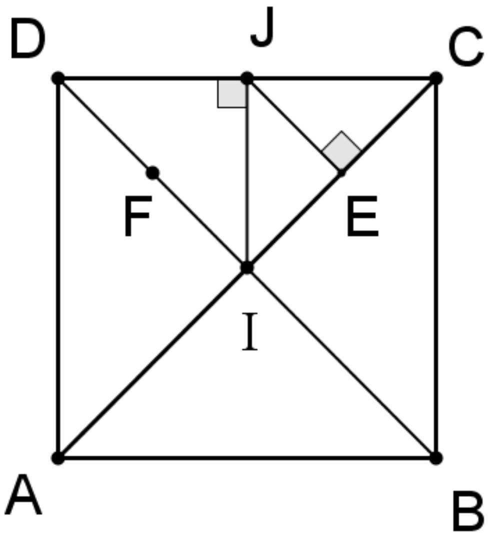
   Montrer que le volume du tétraèdre MABC reste constant lorsque M varie sur la droite (D).

III- (3 points)

Soit ABCD un carré direct de côté 1 tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$.

On désigne par I, J, E et F les milieux respectifs des segments [AC], [CD], [IC] et [DI].

On considère la similitude plane directe S qui transforme A en I et C en J.



1) **Vérifier** que le rapport k de S est égal à $\frac{\sqrt{2}}{4}$

   -trouver un angle α de S.

2) a- **Montrer** que S(B) = E.

   b- **Déduire** l'image du carré ABCD par S.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(A;\overline{AB},\overline{AD}\right)$.

   a- **Déterminer** la forme complexe de S.

   b- **Déduire** l'affixe du point W centre de S.

4) Soient (P) la parabole de foyer A et de directrice (BC) et (P') l'image de (P) par S.

   a- **Montrer** que le point D est sur (P).

   b- **Préciser** la tangente à (P') en F.

IV- (3 points)

Une urne contient quatre boules noires et une boule blanche.

Un jeu se déroule de la manière suivante :

Le joueur jette un dé parfait :

- Si le numéro de la face supérieure du dé est impair, alors une boule blanche est ajoutée à l'urne, on obtient alors 4 boules noires et 2 boules blanches dans l'urne
- Si le numéro de la face supérieure du dé est pair, alors une boule noire est ajoutée à l'urne, on obtient alors 5 boules noires et 1 boule blanche dans l'urne

Ensuite le joueur tire simultanément, et au hasard, **trois** boules de l'urne.

On considère les événements suivants:

I: « le numéro de la face supérieure du dé est impair »

N: « les trois boules tirées sont noires ».

1) **Calculer** les probabilités $P(N/I)$ et $P(N \cap I)$ puis vérifier que $P(N) = 0,35$

2) Les trois boules tirées sont noires.
   Quelle est la probabilité que le numéro de la face supérieure du dé est pair ?

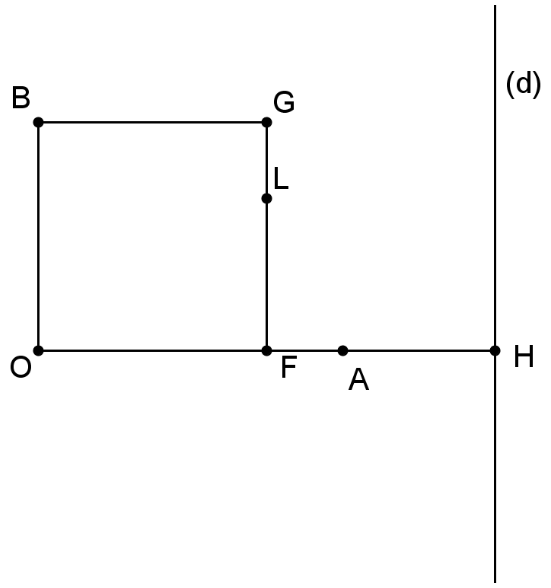
3) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées lors de ce jeu.
   a- **Montrer** que $P(X = 1) = 0,55$.
   b- **Déterminer** la loi de probabilité de X.

4) Chacun de Sami et Karim ont participé à ce jeu une seule fois.
   Soit S la variable aléatoire égale au nombre total de boules blanches obtenues par les deux joueurs Sami et Karim.
   - **Calculer** $P(S \geq 1)$.

V- (3 points)
Dans la figure ci-dessous :

- OFGB est un carré de côté $\sqrt{2}$,
- F est le milieu du segment [OH],
- (d) est la perpendiculaire en H à (OF),
- A est le point de [OH] tel que $OA = 2$,
- L est le point de [FG] tel que $FL = 1$.

Soit (E) l'ellipse de foyer F, de directrice (d) et passant par B.



Partie A

1) **Vérifier** que l'excentricité de (E) est $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2) **Montrer** que A est un sommet de l'ellipse (E).
3) **Vérifier** que O est le centre de l'ellipse (E) et que B est un sommet de (E).

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ et $F\left(\sqrt{2};0\right)$

Soit le point $S\left(0;-1\right)$.

1) **Ecrire** une équation de (E).
2) **Vérifier** que L est un point de l'ellipse (E).
3) **Tracer** (E).
4) **Montrer** que la droite (LH) est tangente en L à (E) et que la droite (SL) est la normale en L à (E).

VI- (7 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle (E): $y'' + 2y' + y = x + 2$. On pose $y = z + x$.

1) **Trouver** une équation différentielle (E_1) satisfaite par Z

2) **Résoudre** (E_1) puis déduire la solution générale de (E).

3) **Déterminer** la solution particulière de (E) qui vérifie $y(0) = -1$ et $y'(0) = 3$.

Partie B

Soient f et g deux fonctions définies sur ℝ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ et $g(x) = 1 + (2-x)e^{-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- **Dresser** le tableau de variations de g .

   (On ne demande pas les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$).

   b- **Déduire** que $g(x) > 0$ pour tout réel x.

2) a- **Déterminer** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   b- **Déterminer** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

   Interpréter ce résultat graphiquement.

3) Soit (L) la droite d'équation: $y = x$.

   a- **Etudier**, suivant les valeurs de x, la position relative de (L) et (C).

   b- **Montrer** que la droite (L) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

4) **Vérifier** que $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

5) **Déterminer** les coordonnées du point A de (C) où la tangente à (C) en A est parallèle à (L)

6) **Montrer** que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique α

   vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$.

7) **Tracer** (L) et (C) dans le repère donné.

8) f admet une fonction réciproque h. On désigne par (C') la courbe représentative de la fonction h.

   Tracer (C') dans le même repère que (C).

9) a- **Déterminer** $\int [x - f(x)]dx$.

   b- On considère les points E (0 ; –1) de (C) et F(–1; 0) de (C').

   Calculer l'aire du domaine limité par (C), (C') et le segment [EF].