عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses a	Réponses b	Réponses c
1	Si $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ et $z' = \frac{iz}{\overline{z}}$ où $z \neq 0$, alors un argument de $\frac{z'}{z}$ est :	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$
2	Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r $(r \neq 0)$, et (v_n) est la suite définie par : $v_n = e^{u_n}$, alors (v_n) est une suite:	géométrique de raison e^r	arithmétique de raison e^r	géométrique de raison r
3	Si $z = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ où $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, alors un argument de z est :	π	$\frac{\pi}{2}$	0
4	$\int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2} dx =$	$(\arctan x)^3 + c$	$\frac{(\arctan x)^2}{2} + c$	$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c$

II- (2 points)

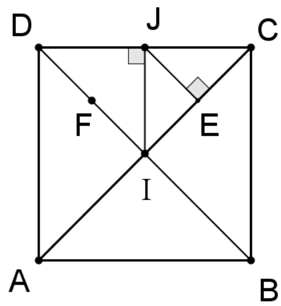
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère les deux points A(1 ; 0 ; 1) et B(-1 ; 2 ; 0) et les deux droites (L) et (D) d'équations paramétriques:

$$(L):\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t-1 \\ z = -2t+3 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (D):\begin{cases} x = 2 \\ y = m-1 \\ z = -m \end{cases} \quad (m\in\mathbb{R}).$$

1) Ecrire une équation cartésienne du plan (P) passant par les deux points A et B et parallèle à (D).
2) a- Vérifier que la droite (L) est contenue dans (P).

   b- Montrer que (L) est perpendiculaire à (AB) en A.
3) Trouver les coordonnées du point C de (L) d'abscisse négative tel que $AC = 6$.
4) Soit M un point variable de (D). Montrer que le volume du tétraèdre MABC reste constant lorsque M varie sur la droite (D).

III- (3 points)



Soit ABCD un carré direct de côté 1 tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$.

On désigne par I, J, E et F les milieux respectifs des segments [AC], [CD], [IC] et [DI].

On considère la similitude plane directe S qui transforme A en I et C en J.

1) Vérifier que le rapport k de S est égal à $\frac{\sqrt{2}}{4}$ et trouver un angle α de S.
2) a- Montrer que S(B) = E.

   b- Déduire l'image du carré ABCD par S.
3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

   a- Déterminer la forme complexe de S.

   b- Déduire l'affixe du point W centre de S.
4) Soient (P) la parabole de foyer A et de directrice (BC) et (P') l'image de (P) par S.

   a- Montrer que le point D est sur (P).

   b- Préciser la tangente à (P') en F.

IV- (3 points)
Une urne contient quatre boules noires et une boule blanche.
Un jeu se déroule de la manière suivante :
Le joueur jette un dé parfait ;

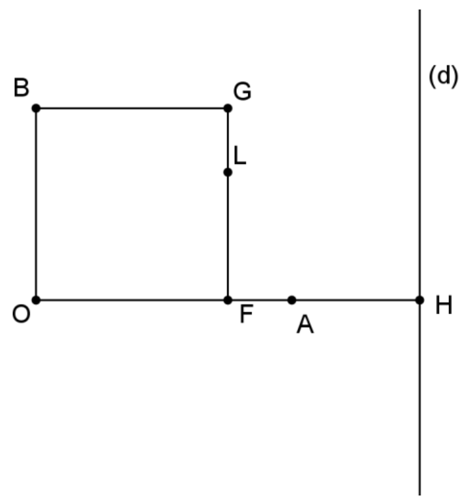
- Si le numéro de la face supérieure du dé est impair, alors une boule blanche est ajoutée à l'urne,
- Si le numéro de la face supérieure du dé est pair, alors une boule noire est ajoutée à l'urne,

Ensuite le joueur tire simultanément, et au hasard, **trois** boules de l'urne.
On considère les événements suivants:
I: « le numéro de la face supérieure du dé est impair »
N: « les trois boules tirées sont noires ».

1) Calculer les probabilités $P(N/I)$ et $P(N \cap I)$ puis vérifier que $P(N) = 0,35$.
2) Les trois boules tirées sont noires. Quelle est la probabilité que le numéro de la face supérieure du dé est pair ?
3) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées lors de ce jeu.
   a- Montrer que $P(X = 1) = 0,55$.
   b- Déterminer la loi de probabilité de X.
4) Chacun de Sami et Karim ont participé à ce jeu une seule fois.
   Soit S la variable aléatoire égale au nombre total de boules blanches obtenues par les deux joueurs Sami et Karim. Calculer $P(S \geq 1)$.

V- (3 points)
Dans la figure ci-contre :

- OFGB est un carré de côté $\sqrt{2}$,
- F est le milieu du segment [OH],
- (d) est la perpendiculaire en H à (OF),
- A est le point de [OH] tel que $OA = 2$,
- L est le point de [FG] tel que $FL = 1$.



Soit (E) l'ellipse de foyer F, de directrice (d) et passant par B.

Partie A

1) Vérifier que l'excentricité de (E) est $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2) Montrer que A est un sommet de l'ellipse (E).
3) Vérifier que O est le centre de l'ellipse (E) et que B est un sommet de (E).

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ et $F(\sqrt{2}; 0)$.

Soit le point $S(0; -1)$.

1) Ecrire une équation de (E).
2) Vérifier que L est un point de l'ellipse (E).
3) Tracer (E).
4) Montrer que la droite (LH) est tangente en L à (E) et que la droite (SL) est la normale en L à (E).

VI- (7 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle (E): $y''+2y'+y=x+2$. On pose $y=z+x$.

1) Trouver une équation différentielle (E_1) satisfaite par z.
2) Résoudre (E_1) puis déduire la solution générale de (E).
3) Déterminer la solution particulière de (E) qui vérifie $y(0)=-1$ et $y'(0)=3$.

Partie B

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$ et $g(x)=1+(2-x)e^{-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Dresser le tableau de variations de g.
   (On ne demande pas les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$).
   b- Déduire que $g(x)>0$ pour tout réel x.
2) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   b- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter ce résultat graphiquement.
3) Soit (L) la droite d'équation: $y=x$.
   a- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (L) et (C).
   b- Montrer que la droite (L) est une asymptote à (C) en $+\infty$.
4) Vérifier que $f'(x)=g(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
5) Déterminer les coordonnées du point A de (C) où la tangente à (C) en A est parallèle à (L).
6) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une racine unique α et vérifier que $0,4<\alpha<0,5$.
7) Tracer (L) et (C) dans le repère donné.
8) f admet une fonction réciproque h. On désigne par (C') la courbe représentative de la fonction h.
   Tracer (C') dans le même repère que (C).
9) a- Déterminer $\int[x-f(x)]dx$.
   b- On considère les points E (0 ; –1) de (C) et F(–1; 0) de (C').
   Calculer l'aire du domaine limité par (C), (C') et le segment [EF].

عدد المسائل: ست

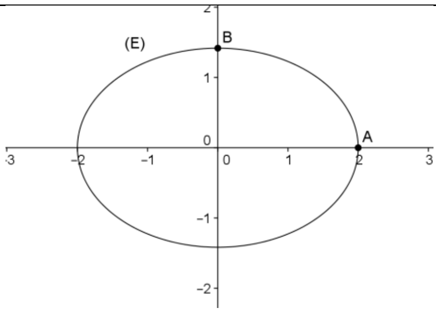
أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

Question I (4 points)		Points
1	$\arg\left(\frac{z'}{z}\right)=\arg\left(\frac{i}{\bar{z}}\right)=\arg(i)-\arg\left(\bar{z}\right)=\frac{\pi}{2}+\theta\ [2\pi]$ **b**	1
2	$V_{n+1}=e^{u_{n+1}}=e^{u_n+d}=e^{u_n}.e^d=v_n e^d$. (v_n) est une suite géométrique de raison $r = e^d$ **a**	1
3	$\arg(z) = \arg(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\ [2\pi] = \arg(2\cos\theta) = 0\ [2\pi]$ **c**	1
4	$\int\frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}dx=\int\frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}dx=\int(\arctan x)^2(\arctan x)'dx=\frac{(\arctan x)^3}{3}+c$ **c**	1

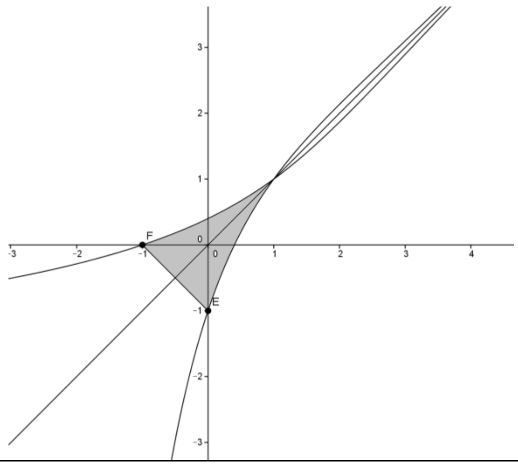
Question II (4 points)		Points
1	$\vec{AM}.(\vec{AB}\wedge\vec{v})=0$, alors $x + 2y + 2z - 3 = 0$	1
2.a	$(L)\subset(P)$.	0.5
2.b	$\vec{V}_L\cdot\vec{AB}=0$ et $A\in(L)$.	0.5
3)	$AC^2 = 36$, donc $9(t-1)^2 = 36$, donc $t = 3$ ou $t = -1$ pour $t = 3$ donc $x_c = 5 > 0$ rejeted pour $t = -1$ donc $x_c = -1$ Alors $C(-3, -2, 5)$	1
4)	(D) / / (P) et M appartient à (D), donc d(M, (P)) est constante A, B et C sont fixes, alors l'aire de ABC est constante Alors, le volume $V=\frac{1}{3}\times d(M,(P))\times Area_{ABC}$ est constante **<u>OR</u>** Soit $M(2, m-1, -m)\in(D)$. $\vec{AM}.\left(\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right)=-18$, alors V = 3 unités de volume qui est une constante.	1

Question III (6 points)		Point
1)	$k=\frac{JI}{AC}=\frac{\frac{1}{2}AD}{AC}=\frac{\frac{1}{2}AD}{AD\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\alpha=\left(\vec{AC};\vec{IJ}\right)=\left(\vec{IC};\vec{IJ}\right)=\frac{\pi}{4}$.	1
2.a	$\frac{IE}{AB}=k$ et $\left(\vec{AB},\vec{IE}\right)=\alpha$. comme S(A) = I, donc S(B) = E **<u>OR</u>** ABC est direct et rectangle isoscèle en B. IEJ est aussi direct et rectangle isoscèle en E. Comme S(A) = I et S(C) = J, Alors S(B) = E	1
2.b	S(A) = I, S(B) = E, S(C) = J, Alors l'image du carré ABCD est aussi un carré qui est IEJF.	0.5
3a	$z' = az + b$; $a= ke^{i\theta}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$; S(A) = I et $z_I=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ alors $b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. D'où $z'=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$	1.5
3b	$Z_W=\frac{b}{1-a}=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$	0.5
4a	DA = DC, donc D est sur (P)	0.5
4b	$D\in(P)$, donc (DB) est la tangente à (P) en D comme (DB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$. S(DB) = (EF), alors (EF) est la tangente à (P’) en F.	1

Question IV (6 points)		Points
1)	$P(B / O) = \dfrac{C_4^3}{C_6^3} = 0.2$ et $P(B \cap O) = 0.2 \times \frac{1}{2} = 0.1$ $P(B \cap \overline{O}) = 0.5 \times \frac{1}{2} = 0.25$ $P(B) = 0.1 + 0.25 = 0.35$	**1.5**
2)	$P(\overline{O} / B) = \dfrac{P(\overline{O} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(B \cap O)}{P(B)} = \dfrac{5}{7}$	**1**
3.a	$P(X = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{C_4^2 \times C_2^1}{C_6^3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{C_5^2 \times C_1^1}{C_6^3} = 0.55$	**1**
3.b	Les valeurs possibles de X sont 0, 1 et 2. P(X = 0) =0.35 ; P(X = 1) = 0.55; P(X = 2) = 1 – (P(X = 0) + P(X = 1)) = 0.1	**1.5**
4	$P(S \geq 1) = 1 - P(S < 1) = 1 - [P(x = 0)]^2 = 1 - (0.35)^2 = 0.8775$	**1**

Question V (6 points)		Points
A.1	$e = \frac{BF}{d(B;(d))} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	**0.5**
A.2	$\frac{AF}{d(A;(d))} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = e$ et A appartient à l'axe focal (FH), alors A est un sommet	**1**
A.3	O appartient à l'axe focal; $\frac{OF}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2} = e = \frac{c}{a}$, et **O, F et A sont alignés dans ce sens** alors O est le centre de (E). **OU** $e = \frac{c}{a}$ et $AF = a - c = 2 - \sqrt{2}$ donnent $c = \sqrt{2} = OF$ avec O est un point de l'axe focal alors O est le centre de (E) (OB) est perpendiculaire à (OA), alors B appartient à l'axe focal; or B ∈ (E), alors B est un sommet de (E).	**1**
B.1	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$	**0.5**
B.2	$L(\sqrt{2}; 1) \in (E)$	**0.5**
B.3		**1**
B.4	Une équation de la tangente à (E) en L est y = $\frac{-\sqrt{2}}{2}x + 2$; Une équation de (LH) est y = $\frac{-\sqrt{2}}{2}x + 2$. Donc, (LH) est tangente à (E) en L	**1.5**

	$L \in (LS)$ et $a_{(LS)} \times a_{(LH)} = -1$, alors (SL) est la normale à (E) en L.	

	Question VI (14 points)	points
A.1	$y' = z' + 1$; $y'' = z''$; $z'' + 2z' + z = 0$ (E_1)	**0.5**
A.2	L'équation caractéristique de (E) est: $r^2 + 2r + 1 = 0$; $r_1 = r_2 = -1$; donc $z = (c_1 + c_2x)e^{-x}$ est la solution générale de (E_1); $z = (c_1 + c_2x)e^{-x}$ est la solution générale de (E).	**1.5**
A.3	$y(0) = -1$ donne $c_1 = -1$; $y'(0) = 3$ donne $c_2 = 1$	**0.5**
B.1a	$g(x) = 1 + (2 - x)e^{-x}$ $g'(x) = (x - 3)e^{-x}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 3 & & +\infty \\ \hline g'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline g(x) & & \searrow & 1-e^{-3} & \nearrow & \end{array}$	**1**
B.1b	La valeur minimale de g est > 0 then g(x) > 0 for all x	**0.5**
B.2a	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty) + (-\infty)(+\infty) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x + \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}) = +\infty$	**1**
B.2b	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (1 + \frac{x+1}{x} e^{-x}) = 1 + (1)(+\infty) = +\infty$, direction asymptotique verticale.	**1**
B3.a	$\delta(x) = f(x) - x = (x - 1)\, e^{-x}$ $\delta(x) = 0$; (L) coupe (C) au point (1 ; 1) $\delta(x) > 0$; $x > 1$ et (C) est strictement au-dessus de (L) $\delta(x) < 0$; $x < 1$ and (C) est strictement en-dessous de (L)	**1**
B.3b	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}) = 0$; (L) est une asymptote à (C) en $+\infty$.	**0.5**
B.4	$f'(x) = 1 + e^{-x} - e^{-x}(x - 1) = 1 + e^{-x}(1 - x + 1) = 1 + (2 - x)e^{-x} = g(x) > 0$ $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$	**1**
B.5	$f'(x_A) = 1$ gives $x_A = 2$; hence, $A(2; 2 + \frac{1}{e^2})$	**0.5**
B.6	Sur IR, f est définie, continue and strictement croissante and f(x) change de signes (– to +), alors l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α. $f(0.4) = -0.002 < 0$, $f(0.5) = 0.196 > 0$, alors $0.4 < \alpha < 0.5$	**1**
B.7		**1**
B.8	(C) et (C′) sont symétriques par rapport à y = x; Voir la figure	**1**
B.9a	$\int (x - f(x))dx = \int (1 - x)e^{-x}dx = xe^{-x} + c$	**1**
B.9b	$A = \frac{1\times1}{2} + 2\int_0^1 (x - f(x))dx = \frac{1}{2} + \frac{2}{e} u^2$	**1**