عدد المسائل: ست

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

مسابقة في مادة الرياضيات

المدة: أربع ساعات

(باللغة العربية)

الاسم: ....

الرقم: ....

I) (علامتان)

برهن العبارات التالية:

١) إذا كان $(k \in \mathbb{Z})$, $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$, و $z' = \dfrac{iz}{\overline{z}}$ حيث $z \neq 0$ عندئذ

$\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$.

٢) إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فرقها (فضلها المشترك) d ، $d \neq 0$ و (v_n) متتالية حسابية معرّفة على الشكل التالي: $v_n = e^{u_n}$ فإن (v_n) هي متتاليّة هندسيّة نسبتها المشتركة e^d.

٣) إذا كان العدد المركّب z يساوي $z = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ ، حيث $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ فإنّ $\arg(z)$ يساوي 0.

٤) $\displaystyle\int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}dx = \frac{(\arctan x)^3}{3} + c$

II- (علامتان)

في الفضاء الإحداثي العائد للنّظام $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعرّف النقطتين $A(1\,;0\,;1)$ و $B(-1\,;2\,;0)$ والمستقيمين (L) و (D) المعرفّين بالمعادلات الآتية:

$$(L):\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t-1 \quad\quad t\in\mathbb{R} \\ z = -2t+3 \end{cases} \quad \text{و} \quad (D):\begin{cases} x = 2 \\ y = m-1 \quad\quad m\in\mathbb{R} \\ z = -m \end{cases}$$

١) **اكتب** <u>معادلة المستوي (P)</u> المتوازي مع المستقيم (D) والذي يمرّ بالنقطتين A و B.

٢) أ- **تحقّق** من أنّ المستقيم (L) يقع في المستوي (P).

ب- **برهن** أنّ المستقيم (L) متعامدٌ على المستقيم (AB) عند النقطة A .

٣) **جدّ** إحداثيّات النقطة $C(x,y,z)$ على المستقيم (L) حيث $AC = 6$ و $x_C < 0$.

٤) لتكن M نقطة متغيّرة على المستقيم (D) .

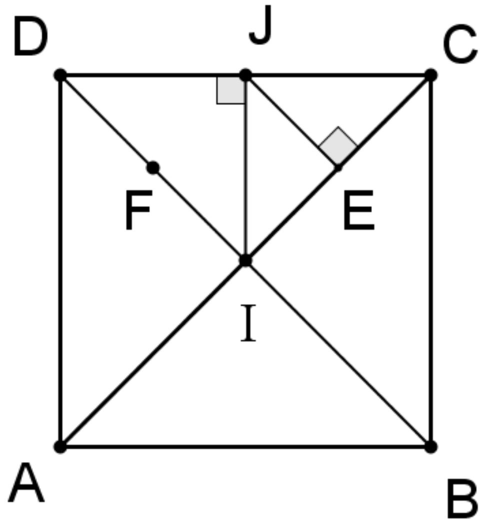
برهن أنّ حجم الهرم MABC يبقى ثابتًا عندما تتحرك النقطة M على المستقيم (D).

III- (ثلاث علامات)

ليكن ABCD مربّعًا موجّهًا طول ضلعه ١ حيث أنّ: $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

نرمز بالأحرف I و J و E و F لمنتصفّات [AC] و [CD] و [IC] و [ID] على التوالي.

ليكن S هو التشابه الذي يحوّل A إلى I و C إلى J.



١) أ- **تحقّق** أنّ النسبة k للتشابه S هي $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

ب- **جدّ** قيمة α زاوية هذا التشابه.

٢) أ- **برهن** أنّ $S(B) = E$.

ب- **استنتج** صورة المربّع ABCD بواسطة التشابه S .

٣) ليكن المستوي الإحداثي العائد للنظام $\left(A;\ \overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AD}\right)$

أ- **اكتب** الشكل المركّب للتشابه S.

ب-**استنتج** العدد المركّب للنقطة w مركز التشابه S.

٤) ليكن (P) القطع المكافئ بؤرته النقطة A ودليله المستقيم (BC)ذ . لتكن (P') صورة القطع (P) بالتشابه S.

أ- **برهن** ان النقطة D موجودة على (P).

ب- **حدّد** المماس على (P') في النقطة F .

IV - (ثلاث علامات)

يحتوي صندوق على أربع كرات سوداء اللّون، وكرة واحدة بيضاء. تجري لعبة على الشكل التالي:

يرمي اللاعب مكعب أعداد،

- إذا كان الوجه الظاهر يحمل رقمًا فرديًّا تضاف طابة بيضاء إلى الصندوق.
- إذا كان الوجه الظاهر يحمل رقمًا زوجيًّا تضاف طابة سوداء إلى الصندوق.

بعد ذلك يسحب اللاّعب **ثلاث** كرات دفعة واحدة بشكل عشوائي.

لتكن الأحداث الآتية:

- I: "الرقم الظاهر على الوجه الأعلى مفردًا"
- N: "الكرات الثلاث المسحوبة جميعها سوداء".

١) **احسب** الاحتمالات $P(N/I)$ و $P(N\cap I)$ ثم تحقّق أن $P(N)=0.35$.

٢) الكرات الثلاث المسحوبة جميعها سوداء.

ما هو احتمال أن يكون الرقم على الوجه الأعلى من الزهر زوجيًّا؟

٣) ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات البيضاء المسحوبة أثناء اللعبة.

أ- **برهن** أن $P(X=1)=0.55$

ب- **حدد** التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

٤) يلعب كل من سامي وكريم نفس اللعبة أعلاه. ليكن S المتغير العشوائي الذي يمثل إجمالي عدد الكرات البيضاء التي حصل عليها اللاعبان معاً.

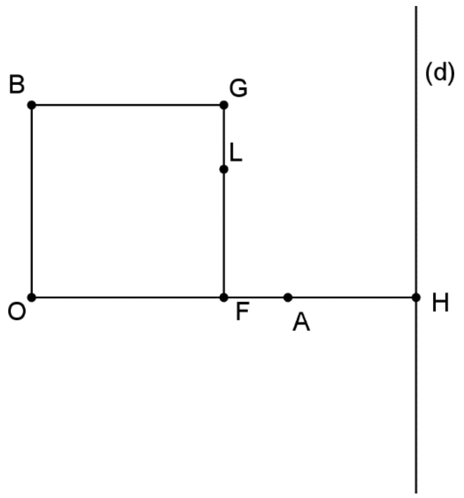
احسب $P(S\geq 1)$.

٧ - (ثلاث علامات)

في الرسم أدناه :

- OFGB هو مربع طول ضلعه $\sqrt{2}$
- النقطة F هي منتصف القطعة المستقيمة [OH]
- المستقيم (d) متعامد على المستقيم (OF) عند النقطة H
- النقطة A على [OH] حيث أن $OA = 2$
- النقطة L على [FG] حيث أن $FL = 1$.

ليكن (E) القطع الناقص الذي يمر بالنقطة B، بؤرته النقطة F و خطّه الموجه المستقيم (d).



القسم الأول

١) **تحقق** من أن $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

٢) **برهن** أن النقطة A هي أحد رؤوس القطع الناقص(E).

٣) **تحقق** أن النقطة O هي مركز القطع الناقص (E) وأن النقطة Bهي أحد الرؤوس.

القسم الثاني

ليكن المستوي العائد للنظام الإحداثي $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ و $F(\sqrt{2}, 0)$.

لتكن النقطة S(0 ; -1).

١) **أكتب** معادلة القطع الناقص (E).

٢) **تحقق** أن النقطة L موجودة على القطع الناقص (E).

٣) **ارسم** (E).

٤) **برهن** أن المستقيم (LH) هو مماس على (E) في النقطة L وأنّ (SL) هو المستقيم العمودي على (E) في النقطة L.

VI – (سبع علامات)

القسم الأوّل

لنأخذ المعادلة التفاضليّة $(E):\ y''+2y'+y=x+2$. فليكن $y=z+x$.

١) **جد** معادلة تفاضليّة (E') تحقّقها z.

٢) **حلّ** المعادلة (E') واستنتج الحلّ العام للمعادلة (E).

٣) **جدّ** الحلّ الخاصّ للمعادلة (E) الذي يحقّق الشرطين: $y(0)=-1$ و $y'(0)=3$.

القسم الثاني

لتكن f و g دالّتين معرّفتين على $\mathbb{R}$ على الشكل التالي: $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$ و $g(x)=1+(2-x)e^{-x}$.

نرمز بالحرف (C) إلى بيان الدالّة f في المستوي الإحداثي العائد للنظام $(O;\vec{i},\vec{j})$.

١) أ- **ارسم** جدول التغيّر للدالّة g (ليس مطلوبًا حساب نهايات g عند ∞ – ولا عند ∞ +)

ب- **استنتج** أن $g(x)>0$ لجميع قيم المتغيّر x.

٢) أ- **حدّد** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- **احسب** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. فسّر النتيجة بيانيًا.

٣) ليكن (L) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

أ- **ادرس** بحسب قيم المتغيّر x موقع المستقيم (L) بالنسبة إلى البيان (C).

ب- **برهن** أن المستقيم (L) هو مقارب للبيان (C) عند $+\infty$.

٤) **تحقّق** من أنّ $f'(x)=g(x)$ ثمّ **ارسم** جدول التغيّر للدالّة f.

٥) **جدّ** إحداثيّات النقطة A على البيان (C) حيث أنّ المماس موازيًا للمستقيم (L).

٦) **برهن** أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً واحدًا فقط α

و**تحقّق** من أنّ $0.4 < \alpha < 0.5$.

٧) **ارسم** (L) و (C) .

٨) لتكن h هي الدالّة العكسيّة للدّالّة f.

نرمز بالحرف (C') البيان الخاصّ بالدّالّة h .

ارسم (C') في نفس المستوي الإحداثي.

٩) أ- **احسب** $\int [x - f(x)] dx$

ب- لتكن النقطة E (0 ; –1) على (C) والنقطة F(–1; 0) على (C').

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين (C) و (C') والقطع المستقيم [EF].