وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات الرسمية	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع: العلوم العامة	دورة العام ٢٠١٧ الاستثنائيّة الخميس في ٣ آب ٢٠١٧
عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I. (علامتان)

في الفضاء الاحداثي العائد للنظام $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعطي النقطة $E(-2\,;\,0\,;\,1)$ والمستقيم (d) ذو المعادلات:
$x = m - 1,\ y = 2m,\ z = m + 2$ حيث أن $m \in \mathbf{R}$.

١) أ- تحقق ان النقطة $E(-2\,;\,0\,;\,1)$ لا توجد على المستقيم (d).
ب- برهن ان معادلة المستوي (P) الذي يحتوي (d) و E هي: $x - z + 3 = 0$.

٢) نعطي الدائرة (C) في المستوي (P) ذات المركز $I(-3\,;\,-1\,;\,0)$ ونصف القطر $\sqrt{3}$.
أ- برهن ان المستقيم (d) هو مماس الدائرة (C) في النقطة $F(-2\,;\,-2\,;\,1)$.
ب- تحقق ان E توجد على (C) وحَدّد احداثيات النقطة A على (d) حيث أن (AE) مماس للدائرة (C).

٣) ليكن (Δ) المستقيم المتعامد مع المستوي (P) في النقطة I.
أ- أكتب معادلات المستقيم (Δ).
ب- احسب إحداثيات النقطة M على (Δ) حيث ان حجم الهرم MIEF يساوي وحدتين مكعبتين وبشرط $x_M \neq 0$.

II. (٣ علامات)

لدينا مكعب أعداد مرقم من ١ الى ٦ وصندوقين U_1 وَ U_2.
يحتوي الصندوق U_1 على اربع طابات زرقاء وثلاث طابات حمراء وطابة خضراء.
يحتوي الصندوق U_2 على اربع طابات زرقاء وطابتين حمراوين وطابتين خضراوين.
نرمي مكعب الاعداد:

- اذا كان الوجه الظاهر يحمل احد الرقمين ١ او ٢ فإننا نسحب عشوائيا ودفعة واحدة ثلاث طابات من الصندوق U_1.
- غير ذلك، فإننا نسحب عشوائيّا ودفعة واحدة ثلاث طابات من الصندوق U_2.

لتكن الاحداث التالية:
A: الوجه الظاهر على المكعب يحمل احد الرقمين ١ او ٢.
B: الطابات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون.
C: لا توجد أي طابة حمراء ضمن الطابات الثلاث المسحوبة.

١) أ- احسب الاحتمال $P\left(B/A\right)$ وبرهن أن $P(A \cap B) = \dfrac{5}{168}$.
ب- أحسب $P(B)$.

٢) أ- تحقق أن $P(C) = \dfrac{25}{84}$.
ب- علما انه لا يوجد اي طابة حمراء بين الطابات الثلاث المسحوبة، احسب احتمال ان يكون الوجه الظاهر على المكعب يحمل رقماً اكبر من او يساوي ٣.

٣) لتكن X المتغيّرة العشوائيّة التي تساوي عدد الطابات الخضراء ضمن الطابات الثلاث المسحوبة.
أ- حدد التوزيع الاحتمالي للمتغيرة X.
ب- أذا تكررت هذه اللعبة ١٦٠ مرّة، قدّر عدد الطابات الخضراء المسحوبة نتيجة لهذا التكرار.

III. **(علامتان)**

لتكن (U_n) هي المتتالية المعرّفة كما يلي: $U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$ حيث ان $n \in \mathbb{N}$.

١) أ- احسب U_0.

ب- جد $U_0 + U_1$ ثم استنتج U_1.

٢) أ- لكل قيم $n \in \mathbb{N}$ ، برهن أن $U_n \geq 0$.

ب- لكل قيم x حيث أن $0 \leq x \leq 1$، برهن أن المتتالية (U_n) متنازلة.

ج- استنتج أنه يوجد نهاية لهذه المتتالية (U_n).

٣) أ- لكل قيم $n \in \mathbb{N}$ برهن أن $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{1+2n}$.

ب- استنتج نهاية المتتالية U_n عندما تتجه n الى $+\infty$.

IV. **(٣ علامات)**

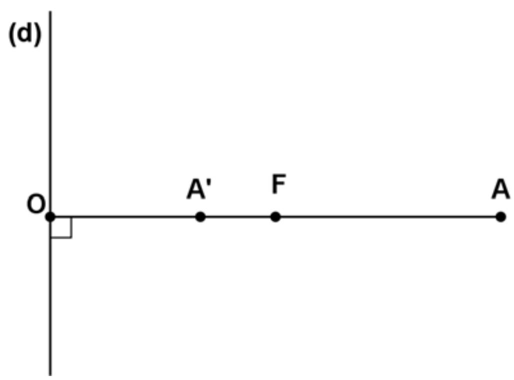
في المستوي (P) ، نعطي المستقيم (d) والنقطة F

النقطة O هي الاسقاط العامودي للنقطة F على المستقيم (d) بحيث ان $OF=3$.

لتكن A تناظر النقطة O بالنسبة للنقطة F ، ولتكن A' النقطة على القطعة المستقيمة $[OF]$ حيث ان $OA' = 2$.

نأخذ في هذا المستوي (P) القطع الناقص (E) ذو البؤرة F والدليل المرتبط بها (d) والاختلاف المركزي $\frac{1}{2}$.

القسم الاول



١) أ- تحقق ان A وA' هما رأسين للقطع الناقص (E).

ب- حدد المركز I للقطع الناقص (E) وكذلك بؤرته الثانية G.

٢) لتكن النقطتان B و B' هما الرأسان الآخران للقطع الناقص (E)على المحور الأصغر.

أ- أحسب AA' وتحقق ان $BB' = 2\sqrt{3}$.

ب- أرسم (E).

القسم الثاني

ليكن (P) هو المستوي الاحداثي العائد للنظام $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث ان $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$.

١) تحقق ان معادلة (E) هي $3x^2 + 4y^2 - 24x + 36 = 0$.

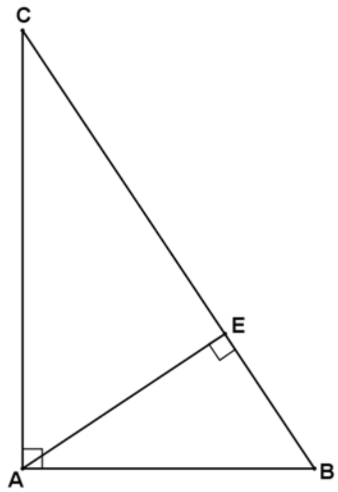
٢) لتكن L هي النقطة على (E) حيث أن $x_L = 3$ وَ $y_L > 0$.

أ- أكتب معادلة (T) مماس القطع الناقص (E) في النقطة L.

ب- لتكن K هي نقطه التقاء (T) مع المحور الأصغر للقطع الناقص (E) ،
أحسب مساحة المنطقة التي توجد داخل المثلث OIK وخارج القطع الناقص (E).

V.　(٤ علامات)

في المستوي الموّجه نأخذ المثلث ABC القائم الزاوية في A حيث أنّ $AB = 4$ وَ $AC = 6$ وَ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.



لتكن النقطة E هي الاسقاط العامودي للنقطة A على المستقيم (BC) .

ليكن S هو التشابه الذي يحوّل B الى A وَ A الى C.

١) أحسب النسبة k للتشابه S وجد قياس زاوية α لهذا التشابه.

٢) أ- حدد صورة المستقيم (AE) بواسطة التشابه S وكذلك صورة المستقيم (BC) بواسطة S.

ب- استنتج أن النقطة E هي مركز S.

٣) لتكن $F = S(C)$.

أ- برهن أن A وَ E وَ F تقع على نفس المستقيم.

ب- برهن أن المستقيم (CF) هو مواز للمستقيم (AB) .

ج- أرسم F واحسب CF.

٤) نرمز بالحرف h الى التناسب الذي يحول A الى B والذي نسبته $\frac{-1}{3}$.

أ- حَدّد $S \circ h(A)$.

ب- $S \circ h$ هي تشابه، حدد مركزه ونسبته وقياساً لزاويته.

٥) ليكن المستوي الاحداثي العائد للنظام $\left(A;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$ حيث ان $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ وَ $\vec{v} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

ا- اكتب الشكل المركب ل $S \circ h$.

ب- احسب العدد المركب ل $S \circ h(B) = B'$.

ج- ليكن (P) هو القطع المكافئ ذو الرأس A والبؤرة B وليكن (P′) صورة (P) بواسطة $S \circ h$.

أكتب معادلة (P′).

VI.   (٦ علامات)

القسم الاول

١) تحقق ان $\int \ln x dx = x\ln x - x + k$ حيث ان k هو عدد حقيقي ,وَ x>0.

٢) لتكن المعادلة التفاضلية $(E): xy' + y = -1 - 2x - 2\ln x$. المحققة ب y حيث ان y هو دالة للمتغير x وَ x>0.

نفترض ان z = x y.

أ- أكتب المعادلة التفاضلية (E′) المحققة بواسطة z ثم حّل (E′).

ب- استنتج حلا للمعادلة (E) حيث ان y(1) = 0.

القسم الثاني

لتكن الدالتان g و f المعرفتان على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = 1 - x - 2\ln x$ وَ $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$.

نرمز بالحرف (C) الى بيان الدالة f في المستوي الاحداثي $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

١) أ- حدد النهايات $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب- أحسب $g'(x)$ وأنشىء جدول التغيّر للدالة g .

ج- احسب $g(1)$ ثم ادرس اشارة $g(x)$ حسب قيم المتغير x.

٢) حدد النهايات $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وأستنتج المقاربين للبيان (C) .

٣) برهن أنّ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ وأنشىء جدول التغيّر للدالة f.

٤) أحسب القيمة المظبوطة ل $f(e)$ وارسم البيان (C) .

٥) استعمل تكاملاً بالتجزئة لتحسب $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

٦) أ- برهن ان للدالة f على $]1;+\infty[$ يوجد دالة عكسية f^{-1} يتم تحديد مجالها.

ب- أرسم البيان (Γ) العائد للدالة f^{-1} في نفس المستوي الاحداثي للبيان (C).

ج- أحسب مساحة القسم المحدد بالبيان (Γ) والمستقيمات الثلاث ذات المعادلات y = 1 وَ $x = \frac{e+1}{e^2}$ وَ x = 1.