ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (2 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le point $E(-2\ ;0\ ;1)$ et la droite (d) définie par $x = m - 1\ ;\ y = 2m\ ;\ z = m + 2$ où $m \in \mathbb{R}$.

1) a- Vérifier que E n'appartient pas à (d).
   b- Montrer que $x - z + 3 = 0$ est une équation du plan (P) formé par E et (d).
2) On considère dans le plan (P) le cercle (C) de centre $I(-3\ ;-1\ ;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   a- Montrer que la droite (d) est tangente au cercle (C) au point $F(-2\ ;-2\ ;1)$.
   b- Vérifier que E appartient à (C) et déterminer les coordonnées du point A de (d) tel que (AE) soit tangente à (C).
3) Soit (Δ) la droite perpendiculaire en I à (P).
   a- Ecrire un système d'équations paramétriques de (Δ).
   b- Trouver les coordonnées du point M de (Δ) d'abscisse non nulle, tel que le volume du tétraèdre MIEF soit égal à 2 unités de volume.

II- (3 points)

On dispose d'un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et de deux urnes U_1 et U_2.
U_1 contient 4 boules bleues, 3 boules rouges et une boule verte.
U_2 contient 4 boules bleues, 2 boules rouges et 2 boules vertes.
Un jeu consiste à lancer tout d'abord le dé.

- Si la face obtenue porte l'un des chiffres 1 ou 2, on tire alors de U_1 simultanément et au hasard trois boules.
- Sinon, on tire alors de U_2 simultanément et au hasard trois boules.

On considère les évènements suivants :
A : « La face obtenue porte l'un des chiffres 1 ou 2 »
B : « Les trois boules tirées sont de même couleur »
C : « Parmi les trois boules tirées, aucune n'est rouge »

1) a- Calculer la probabilité $P\left(B/A\right)$ et montrer que $P(A \cap B) = \dfrac{5}{168}$.
   b- Calculer P(B).
2) a- Vérifier que $P(C) = \dfrac{25}{84}$.
   b- Sachant que parmi les trois boules tirées aucune n'est rouge, calculer la probabilité que la face obtenue du dé porte un chiffre supérieur ou égal à 3.
3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes tirées parmi les trois boules tirées.
   a- Déterminer la loi de probabilité de X.
   b- Si ce jeu est répété 160 fois, estimer alors le nombre de boules vertes tirées.

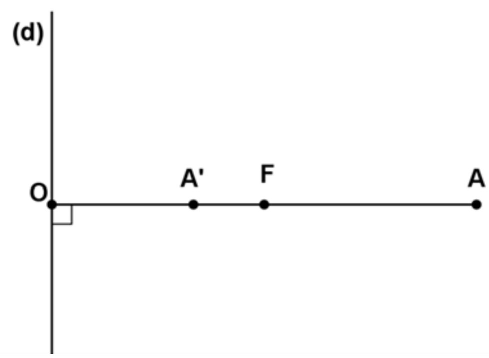
III- (2 points)

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$ où $n \in \mathbb{N}$.

1) a- Calculer U_0.
   b- Calculer $U_0 + U_1$ et en déduire U_1.
2) a- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $U_n \geq 0$.
   b- Montrer que, pour $0 \leq x \leq 1$, (U_n) est décroissante.
   c- Déduire que (U_n) est convergente.
3) a- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{1+2n}$.
   b- Déduire la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.

IV- (3 points)

Dans un plan (P), on donne une droite (d) et un point F.
O est le projeté orthogonal de F sur (d) et FO = 3.
A est le symétrique de O par rapport à F et A′ le point du segment [OF] tel que OA′ = 2.
Dans le plan (P), on considère l'ellipse (E) de foyer F, de directrice associée (d) et d'excentricité $\frac{1}{2}$.



Partie A

1) a- Vérifier que A et A′ sont deux sommets de (E).
   b- Déterminer le centre I de (E) et son deuxième foyer G.
2) On désigne par B et B′ les sommets de l'axe non focal de (E).
   a- Calculer AA′ et vérifier que BB′ = $2\sqrt{3}$.
   b- Tracer (E).

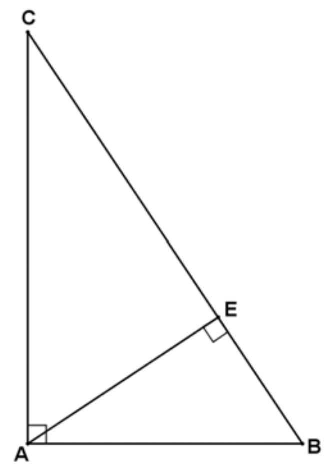
Partie B

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$.

1) Vérifier qu'une équation de (E) est : $3x^2 + 4y^2 - 24x + 36 = 0$.
2) Soit L le point de (E) d'abscisse 3 et d'ordonnée positive.
   a- Ecrire une équation de la tangente (T) en L à (E).
   b- K est le point d'intersection de (T) avec l'axe non focal.
   Calculer l'aire du domaine intérieur au triangle OIK et extérieur à l'ellipse (E).

V- (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 4 ; AC = 6 et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.



E est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

S est la similitude plane directe qui transforme B en A et A en C.

1) Calculer le rapport k de S et trouver une mesure d'un angle α de S.
2) a- Déterminer l'image de la droite (AE) par S et l'image de la droite (BC) par S.
   b- Déduire que E est le centre de S.
3) Soit F = S(C).
   a- Prouver que A, E et F sont alignés.
   b- Montrer que (CF) est parallèle à (AB).
   c- Construire F et calculer CF.
4) On note par h l'homothétie de rapport $\frac{-1}{3}$ qui transforme A en B.
   a- Déterminer $S \circ h(A)$.
   b- $S \circ h$ est une similitude plane directe.
   Déterminer son centre, son rapport et une mesure de son angle.
5) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(A;\ \vec{u}, \vec{v}\right)$ avec $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
   a- Ecrire la forme complexe de $S \circ h$.
   b- Calculer l'affixe du point $B' = S \circ h(B)$.
   c- (P) est la parabole de sommet A et de foyer B et (P′) est l'image de (P) par $S \circ h$.
   Ecrire une équation de (P′).

VI- (6 points)

Partie A

1) Vérifier que $\int \ln x dx = x\ln x - x + k$ où k est une constante réelle et $x > 0$.

2) On considère l'équation différentielle $(E): xy' + y = -1 - 2x - 2\ln x$ satisfaite par y où y est une fonction de x $(x > 0)$.

   On pose $z = x\,y$.

   a- Former une équation différentielle (E′) satisfaite par z et résoudre (E′).

   b- En déduire la solution particulière de (E) tel que $y(1) = 0$.

Partie B

On considère les deux fonctions g et f définies sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 1 - x - 2\ln x$ et $f(x) = \dfrac{x+\ln x}{x^2}$ et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

   b- Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.

   c- Calculer $g(1)$ puis étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

2) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Déduire les asymptotes à (C).

3) Démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ et dresser le tableau de variations de f.

4) Calculer la valeur exacte de f(e) et tracer la courbe (C).

5) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int \dfrac{\ln x}{x^2}dx$.

6) a- Démontrer que sur $[1;+\infty[$, la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera son domaine de définition.

   b- Tracer, dans le même repère que (C), la courbe (Γ) représentative de f^{-1}.

   c- Calculer l'aire du domaine limité par (Γ) et les trois droites d'équations $y = 1$, $x = \dfrac{e+1}{e^2}$ et $x = 1$.

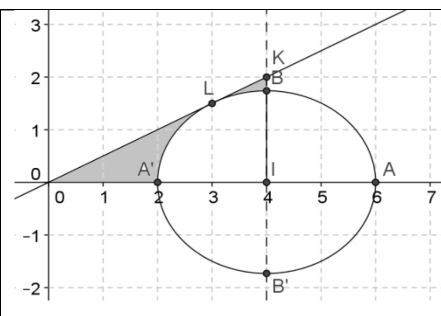
عدد المسائل: ست

أسس تصحيح مادة الرياضيات

QI	Eléments de réponses	Note
1a	m – 1 = –2 ; m = –1 y = 2(m) = 2(–1) = –2 ≠ y_E = 0 alors E ∉ (d)	**0,25**
1b	E ∈ (P) et (d) ⊂ (P).	**0,5**
2a	• F ∈ (d) ⊂ (P) pour m = – 1 • IF = $\sqrt{3}$ = Rayon • $\overrightarrow{IF}\cdot\overrightarrow{V}_d = 0$	**1**
2b	• IE = $\sqrt{3}$ = Rayon et E ∈ (P) alors E ∈ (C) • A(m – 1 ; 2m ; m + 2) et $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{IE} = 0$ par suite m = $-\frac{1}{2}$ d'où A$\left(-\frac{3}{2};-1;\frac{3}{2}\right)$	**1**
3a	(Δ) ⊥ (P) alors $\overrightarrow{V}_{(\Delta)} = \overrightarrow{n}_{(P)}$ et I ∈ (Δ) alors (Δ) : $\begin{cases} x = t-3 \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$; t ∈ ℝ	**0,5**
3b	M(t – 3 ; –1 ; –t) $\det\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IF}\right) = \lvert 4t \rvert$ V = $\frac{1}{6}\left\lvert \det\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IF}\right)\right\rvert = \frac{1}{6}\lvert 4t\rvert = 2$ alors t = –3 ou t = 3 Pour t = –3, M(–6 ; –1 , 3)	**0,75**

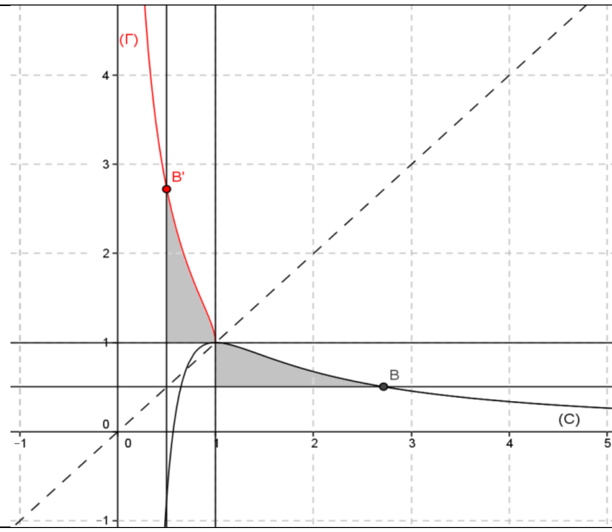
QII	Eléments de réponses	Note
1a	$P\left(B/A\right) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_8^3} = \frac{5}{56}$; $P(A\cap B) = P(A)\times P\left(B/A\right) = \frac{1}{3}\times\frac{5}{56} = \frac{5}{168}$	**1**
1b	$P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B) = \frac{5}{168} + P(\overline{A})\times P\left(B/\overline{A}\right) = \frac{5}{168} + \frac{2}{3}\times\frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{13}{168}$	**1**
2a	$P(C) = P(A\cap C) + P(\overline{A}\cap C) = \frac{1}{3}\times\frac{C_5^3}{C_8^3} + \frac{2}{3}\times\frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{25}{84}$	**1**
2b	$P\left(\overline{A}/C\right) = \frac{P(\overline{A}\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{40}{168}}{\frac{25}{84}} = \frac{4}{5}$	**1**
3a	Les valeurs de X sont 0, 1 et 2. $P(X=0) = \frac{1}{3}\times\frac{C_7^3}{C_8^3} + \frac{2}{3}\times\frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{75}{168}$; $P(X=1) = \frac{1}{3}\times\frac{C_7^2\times C_1^1}{C_8^3} + \frac{2}{3}\times\frac{C_6^2\times C_2^1}{C_8^3} = \frac{81}{168}$ $P(X=2) = \frac{2}{3}\times\frac{C_6^1\times C_2^2}{C_8^3} = \frac{12}{168}$	**1**
1a	$E(X) = \frac{5}{8}$ alors le nombre de boules vertes estimé est $\frac{5}{8}\times 160 = 100$.	**1**

QIII	Eléments de réponses	Note
1a	$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$	**0,5**
1b	$U_0 + U_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2}dx = x\Big]_0^1 = 1$; $U_1 = 1 - U_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$	**0,75**
2a	$\frac{x^{2n}}{1+x^2} \geq 0$ pour $0 \leq x \leq 1$; alors $U_n \geq 0$	**0,5**
2b	$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2} - x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^{2n}\left(x^2 - 1\right)}{1+x^2}dx$ Si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq x^2 \leq 1$, et par suite $x^2 - 1 \leq 0$ D'où $U_{n+1} - U_n \leq 0$ alors (U_n) est décroissante	**0,75**
2c	(U_n) est décroissante et minorée par 0, alors (U_n) est convergente.	**0,5**
3a	$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2} + x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^{2n}\left(x^2 + 1\right)}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^{2n}dx = \left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$	**0,5**
3b	Soit $L = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}$, alors $L + L = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$. Par suite $L = 0$	**0,5**

QIV	Eléments de réponses	Note
A1a	$\frac{AF}{AO} = \frac{1}{2} = e$ et $A \in (OF)$ = axe focal, alors A est un sommet de (E). $\frac{A'F}{A'O} = \frac{OF - OA'}{OA'} = \frac{1}{2} = e$ et $A' \in (OF)$ = axe focal, alors A′ est un sommet de (E).	**0,5**
A1b	I est le milieu de [AA′] ; G est le symétrique de F par rapport à I	**0,5**
A2a	AA′ = A′F + FA = 1 + OF = 4 = 2a, alors a = 2 FG = 2FI = 2(A′I – A′F) = 2 = 2c, alors c = 1 $BB' = 2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{3}$	**1**
A2b		**1**
B1	$a = 2$; $b = \sqrt{3}$; axe focal est l'axe des abscisses ; centre I(4 ; 0) (E) : $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, d'où $3x^2 + 4y^2 - 24x + 36 = 0$	**1**
B2a	$L\left(3\,;\frac{3}{2}\right)$; $y'_L = \frac{1}{2}$; $(T) : y = \frac{x}{2}$	**1**
B2b	K(4 ; 2) ; Aire = Aire(Triangle OIK) – $\frac{1}{4}$ Aire(E) = $\frac{1}{2} \times OI \times IK - \frac{1}{4} \times \pi ab$ = $4 - \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ unités d'aires	**1**

QV	Eléments de réponses	Note
1	$k = \frac{AC}{BA} = \frac{3}{2}$ et $\alpha = \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$	**0,5**
2a	S(A) = C, alors l'image de (AE) est une droite passant par C et perpendiculaire à (AE) qui est (BC). S(B) = A, alors l'image de (BC) est une droite passant par A et perpendiculaire à (BC) qui est (AE).	**1**
2b	$\{E\} = (AE) \cap (BC)$, alors $\{S(E)\} = S((AE)) \cap S((BC)) = (BC) \cap (AE) = \{E\}$	**0,5**
3a	S(B) = A; S(C) = F; S(E) = E B, C et E alignés, alors A, F et E sont alignés	**0,5**
3b	S(A) = C et S(C) = F, alors $(CF) \perp (AC)$ et comme $(AB) \perp (AC)$. Donc (CF) / / (AB)	**1**
3c	F est l'intersection de la parallèle menée de C à (AB) avec (AE). S(A) = C et S(C) = F, alors CF = k AC = 9	**1**
4a	$S \circ h(A) = S(h(A)) = S(B) = A$	**0,5**
4b	$S \circ h\left(A;\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	**0,5**
5a	$z' = \frac{1}{2}iz$	**0,75**
5b	$z_B = 4$, alors $z_{B'} = 2i$	**0,75**
5c	(P′) est la parabole de sommet A(0 ; 0) et de foyer B′(0 ; 2) (P′) : $x^2 = 8y$	**1**

QVI	Eléments de réponses	Note
A1	$(x\ln x - x + k)' = \ln x$	**0,5**
A2a	$z = xy$, $z' = y + xy'$ (E′) : $z' = -1 - 2x - 2\ln x$; $z = -x^2 + x - 2x\ln x + C$	**1**
A2b	$y = \frac{z}{x} = -x + 1 - 2\ln x + \frac{C}{x}$ y(1) = 0, alors C = 0 ; par suite $y = 1 - x - 2\ln x$	**0,75**
B1a	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	**0,5**
B1b	$g'(x) = -1 - \frac{2}{x} < 0$ $\begin{array}{c\|c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline g'(x) & \| & & - & & \\ \hline g(x) & \| & +\infty & \searrow\ 0\ \searrow & & -\infty \end{array}$	**0,75**
B1c	g(1) = 0 g(x) > 0 pour 0 < x < 1 g(x) = 0 pour x = 1 g(x) < 0 pour x > 1	**1**
B2	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$, alors x = 0 est une asymptote.	**1**

	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} \right) = 0$ (ou bien R.H.), alors y = 0 est une asymptote.	
B3	$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & \| & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & \| & -\infty \nearrow & 1 & \searrow & 0 \end{array}$	**1,25**
B4	$f(e) = \dfrac{e+1}{e^2}$ 	**1,25**
B5	$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x - \int -\frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C$	**1**
B6a	f est continue et strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$, alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]\,0\ ;\ 1\,]$	**1**
B6b	(Γ) est la courbe symétrique de la courbe (C) par rapport à la droite y = x.	**0,5**
B6c	$A = \int_{\frac{e+1}{e^2}}^{1} \left(f^{-1}(x) - 1\right) dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{e+1}{e^2} \right) dx = \left[\ln x + \frac{-1 - \ln x}{x} \right]_1^e - \frac{e+1}{e^2} \times (e-1) =$ $1 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2} = \left(\frac{e-1}{e} \right)^2 \approx 0{,}4$ unités d'aire.	**1,5**