عدد المسائل: أربع	مسابقة في مادة الرياضيات	الاسم:
	المدة: ساعتان	الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les trois points A(9; –1; 4), B(5; 1; 2), C(3; 2; 2) et le plan (P) d'équation : x + 2y – 7 = 0 déterminé par A, B et C.

1) Soit (Q) le plan passant par A et B et perpendiculaire au plan (P).
Montrer que $2x - y - 5z + 1 = 0$ est une équation de (Q).
2) On désigne par (d) la droite d'intersection de (P) et (Q).
Ecrire un système d'équations paramétriques de (d).
3) Soit (L) la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = -t + 6 \\ y = -2t + 3 \\ z = 2 \end{cases}$ (t ∈ ℝ).
a- Vérifier que (L) passe par B.
b- Vérifier que (L) est contenue dans (Q) et que (L) est perpendiculaire à (d).
c- Déterminer les coordonnées du point E de (L) d'ordonnée positive tel que l'aire du triangle BCE soit égale à 5 unités d'aire.

II- (4 points)

Une urne U contient dix boules :

- **cinq boules blanches** numérotées 1, 2, 3, 4, 5
- **trois boules noires** numérotées 6, 7, 8
- **deux boules vertes** numérotées 9, 10

Partie A

Un joueur tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne U.
On considère les événements suivants :

A : « les deux boules tirées ont des numéros impairs ».
B : « les deux boules tirées ont la même couleur ».
C : « les deux boules tirées ont des numéros impairs et ont la même couleur ».
D : « les deux boules tirées ont des numéros impairs et sont de couleurs différentes ».

1) Calculer la probabilité P(A) et vérifier que P(B) = $\frac{14}{45}$.
2) a- Calculer P(C).
b- Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
3) Vérifier que P(D) = $\frac{7}{45}$.
4) Sachant que le joueur a tiré deux boules de couleurs différentes, quelle est la probabilité que ces deux boules portent des numéros impairs ?

Partie B

Dans cette partie, le joueur tire successivement, au hasard et avec remise, deux boules de l'urne U.
A chaque boule blanche tirée il marque +1 point, à chaque boule noire tirée il marque –1 point et à chaque boule verte tirée il marque 0 point.
Calculer la probabilité que la somme des points marqués soit égale à zéro.

III- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, M et M′ d’affixes respectives 2i, z et z′ tel que : $z' = \dfrac{2i - z}{iz}$ avec $z \neq 0$.

Soit B le milieu du segment [OA].

1) Ecrire z′ sous forme algébrique dans le cas où z = 1 + i
2) a- Montrer que $OM' = \dfrac{AM}{OM}$.

   b- Démontrer que, si M se déplace sur la droite (d) d’équation y = 1, alors M′ varie sur un cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
3) Vérifier que $z' - i = \dfrac{2}{z}$.
4) Soit $z = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

   a- Ecrire z′ – i sous formes exponentielle et algébrique.

   b- Démontrer que les deux droites (OM) et (BM′) sont perpendiculaires.

IV- (8 points)

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = x + 2 - 2e^x$.

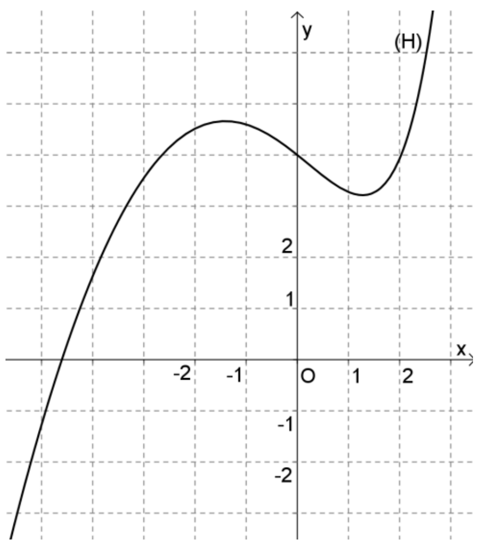
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

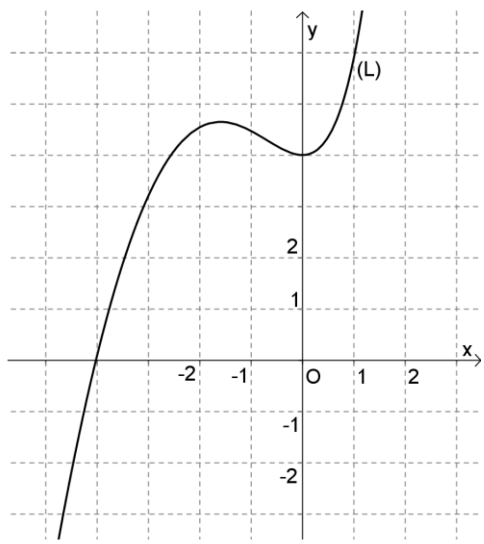
1) a- Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   b- Montrer que la droite (D) d’équation y = x + 2 est une asymptote à (C).

   c- Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) pout tout réel x.
2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et calculer f(1,5).
3) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4) Montrer que l’équation f(x) = 0 admet dans ℝ exactement deux racines 0 et α.
   Vérifier que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$.
5) Tracer (D) et (C).
6) On note par $A(\alpha)$ l’aire du domaine limité par (C) et l’axe des abscisses.

   Montrer que $A(\alpha) = \left(-\dfrac{\alpha^2}{2} - \alpha\right)$ unités d’aire.
7) Soit g une fonction définie sur ℝ avec $g'(x) = -2f(x)$.
   L’une des deux courbes (H) et (L) tracées ci-dessous représente la fonction g. Dire laquelle en justifiant votre réponse.





وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات الرسميّة	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع: علوم الحياة	دورة العام ٢٠١٧ الاستثنائيّة الثلاثاء في ٨ آب ٢٠١٧
عدد المسائل: أربع	أسس تصحيح مادة الرياضيات	

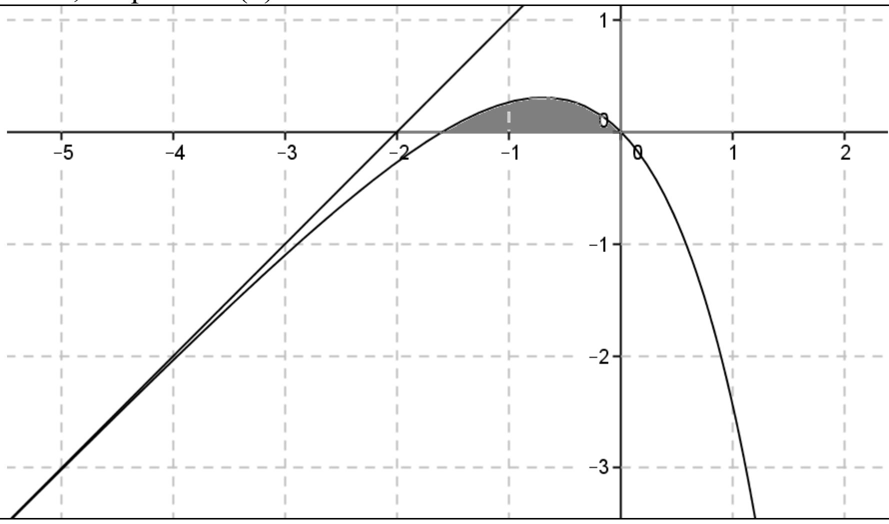
I	Eléments de réponses	Notes
1	$A \in (Q)$: $2(x_A) - (y_A) - 5(z_A) + 1 = 0$, $2(9) - (-1) - 5(4) + 1 = 0$, $0 = 0$ $B \in (Q)$: $2(5) - (1) - 5(4) + 1 = 0$, $0 = 0$. $\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_P} = (2)(1) + (-1)(2) + (-5)(0) = 0$.	0.75
2	$A \in (Q)\cap(P)$ et $B \in (Q)\cap(P)$ donc (d) est la droite (AB). Alors (d) : $\begin{cases} x = -4k + 9 \\ y = 2k - 1 \\ z = -2k + 4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$	0.75
3a	$B \in (L)$ pour $t = 1$.	0.5
3b	$(L) \subset (Q)$: $2(-t + 6) - (-2t + 3) - 5(2) + 1 = 0$, $0 = 0$. $\overrightarrow{V_L}.\overrightarrow{V_d} = (-1)(-4) + (-2)(2) + (0)(-2) = 0$	1
3c	$E \in (L)$ donc $E(-t + 6 ; -2t + 3 ; 2)$, $\overrightarrow{BC}(-2; 1; 0)$, $\overrightarrow{EB}(t-1; 2t-2; 0$. Aire(EBC) = $\frac{1}{2}\left\Vert\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{BC}\right\Vert = 5$ donc $\frac{1}{2}\left\Vert 5(t-1)\vec{k}\right\Vert = 5$, $\frac{1}{2}5\lvert t-1\rvert = 5$, donc $\lvert t-1\rvert = 2$, alors $t = 3$ donc $(3; -3; 2)$ inacc. **ou** $t = -1$ donc $(7; 5; 2)$ acc. Alors $E(7; 5; 2)$. **Autre méthode :** On a : $(L)\subset(Q)$, $(Q)\cap(P) = (d)$, $(L)\perp(d)$ en B et $(P)\perp(Q)$ donc $(L)\perp(P)$ or $(BC)\subset(P)$ donc $(L)\perp(BC)$ en B et par suite EBC est un triangle rectangle en B. Aire(EBC) = $\frac{1}{2}EB.BC = 5$. On a $E \in (L)$ donc $E(-t + 6 ; -2t + 3 ; 2)$. $\frac{1}{2}\sqrt{(t-1)^2 + 4(t-1)^2}.\sqrt{5} = 5$ donc $\lvert t-1\rvert = 2$ alors $t = 3$ donc $(3; -3; 2)$ inacc. **ou** $t = -1$ donc $(7; 5; 2)$ acc. Alors $E(7; 5; 2)$.	1

II	Eléments de réponses	Notes
A1	$P(A) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}$, $P(B) = P(bb) + P(nn) + P(vv) = \frac{C_5^2+C_3^2+C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{14}{45}$	1
A2a	$P(C) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$	0.5
A2b	$P(A\cap B) = P(C) = \frac{1}{15} \neq P(A).P(B) = \frac{28}{405}$ alors A et B ne sont pas indépendants	0.5
A3	$P(D) = P(A\cap \overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = \frac{2}{9} - \frac{1}{15} = \frac{7}{45}$	0.5
A4	$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(D)}{1-P(B)} = \frac{7}{31}$	0.75
B	$P(\text{Somme} = 0) = P(bn \text{ ou } nb) + P(vv) = 2\left(\frac{5\times3}{10^2}\right) + \frac{2\times2}{10^2} = 0{,}34$	0.75

III	Eléments de réponses	Notes
1	$z' = \frac{2i-(1+i)}{i(1+i)} = 1$	0.5
2a	$OM' = \lvert z'\rvert = \frac{\lvert z-2i\rvert}{\lvert i\rvert\lvert z\rvert} = \frac{AM}{OM}$	0.75
2b	$M \in (d)$ alors $M(x; 1)$. On a $A(0; 2)$ donc $OM' = \frac{AM}{OM} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 1$. Alors M′ varie sur le cercle de centre O et de rayon 1. **Autre méthode :** (d) est la médiatrice de [OA] et $M \in (d)$ donc $MA = MO$ alors $OM' = 1$.	0.75
3	$z' - i = \frac{2i-z}{iz} - i = \frac{2}{z}$	0.5
4a	$z' - i = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$	0.75
4b	$(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{BM'}) = (\overrightarrow{OM}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{BM'})\ (2\pi) = -\arg(z) + \arg(z' - i)\ (2\pi) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\ (2\pi) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ **Autre méthode :** $B(0; 1)$, $\overrightarrow{OM}(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $\overrightarrow{BM'}(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. On a : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BM'} = 0$	0.75

<table>
<tr><th>IV</th><th>Eléments de réponses</th><th>Notes</th></tr>
<tr><td>1a</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x-2\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2e^{x}\right) = 0$ alors (D) est une asymptote à (C)</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>1c</td><td>$f(x) - x - 2 = -2e^{x} < 0$ alors (C) est au-dessous de (D)</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(\dfrac{x}{e^{x}}+\dfrac{2}{e^{x}}-2\right) = -\infty$; $f(1,5) = -5,463$</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$f'(x) = 1 - 2e^{x}$
$$\begin{array}{c|ccccccccc} x & -\infty & & \alpha & & -\ln 2 & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & & + & & 0 & & - & & \\ \hline & & & & & 0{,}306 & & & & \\ f(x) & & \nearrow & 0 & \nearrow & & \searrow & 0 & \searrow & \\ & -\infty & & & & & & & & -\infty \end{array}$$</td><td>1.25</td></tr>
<tr><td>4</td><td>

Sur $\left]-\infty;-\ln 2\right[$: f est continue et strictement croissante de $-\infty$ jusqu'à 0,306 > 0 alors l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α.
$f(-1,6) \times f(-1,5) = (-0,003) \times (0,053) < 0$, alors $-1,6 < \alpha < -1,5$.
Sur $\left]-\ln 2;+\infty\right[$: f est continue et strictement décroissante de 0,306 > 0 jusqu'à $-\infty$ alors l'équation f(x) = 0 admet une solution unique β.
Puisque f(0) = 0, alors β = 0.

D'où, l'équation f(x) = 0 admet exactement deux solutions 0 et α.</td><td>1.25</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td><td>1.25</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$A(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{0} f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}+2x-2e^{x}\right]_{\alpha}^{0} = -2-\frac{\alpha^2}{2}-2\alpha+2e^{\alpha}$.
Mais $f(\alpha) = 0$, alors $2e^{\alpha} = \alpha + 2$, d'où $A(\alpha) = \left(-\dfrac{\alpha^2}{2}-\alpha\right)$ unités d'aire.</td><td>1.25</td></tr>
<tr><td>7</td><td>
$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & \alpha & & 0 & & +\infty \\ \hline g'(x) = -2f(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline g(x) & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \end{array}$$
Pour x = 0, $g'(x) = 0$ et $g'(x)$ change le signe, alors la courbe de la fonction g admet un extremum.
Par suite, (H) ne représente pas la courbe représentative de la fonction g donc (L) est la courbe représentative de la fonction g.</td><td>1</td></tr>
</table>