ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

	Questions	Réponses a	b	c	d
1	f est la fonction définie sur $\left]-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{25-4x^2}}$. Une primitive de f est :	$\arcsin\frac{2x}{5}$	$\arcsin 2x$	$\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{5}$	$\frac{2}{5}\arcsin\frac{2x}{5}$
2	Si $T(x)=\int_1^{2x}\sqrt{1+3\ln^2 t}\,dt$ où $x > 0$, alors $T'\left(\frac{e}{2}\right)=$	1	2	3	4
3	z et z' sont des nombres complexes. Si $z'=\frac{z-2i}{iz+2}$ avec $z\neq 2i$, alors $\lvert z'\rvert=$	1	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	$\sqrt{5}$	2
4	Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on donne les deux points M et M' d'affixes non nulles respectives z et z'. Si $z'\sqrt{2}=(1-i)z$, alors le triangle OMM' est:	rectangle	isocèle	équilatéral	rectangle isocèle

II- (2,5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points suivants : A (1 ; –1 ; 2), B (–1 ; 1 ; 3) et E (–1 ; 4 ; $\frac{3}{2}$).

Soit (P) le plan d'équation $2x+y+2z-5=0$ et (Δ) la médiatrice de [AB] dans le plan (P).

1) Vérifier que les points A et B appartiennent au plan (P).
2) a- Vérifier que $\vec{V}(1;2;-2)$ est un vecteur directeur de (Δ).

   b- Ecrire un système d'équations paramétriques de (Δ).
3) Soit I un point de (Δ) tel que $x_I > 0$. Considérons dans le plan (P) le cercle (C) de centre I, de rayon 3 et tangent à (AB).

   a- Déterminer les coordonnées de I.

   b- Vérifier que E appartient au cercle (C).
4) (D) est la droite définie par $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=4t+4 \\ z=-4t+\frac{3}{2} \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

   Démontrer que la droite (D) est tangente au cercle (C) en E.

III- (2,5 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

U_1 contient deux boules rouges et une boule verte.

U_2 contient quatre boules rouges et trois boules vertes.

Chaque boule rouge porte le nombre 1 et chaque boule verte porte le nombre –1.

On tire au hasard une boule de U_1.

- Si elle est rouge, on tire alors au hasard une boule de U_2. *(On aura donc deux boules)*
- Si elle est verte, on tire alors simultanément et au hasard deux boules de U_2. *(On aura donc trois boules)*

On considère les évènements suivants :

R_1 : « tirer une boule rouge de U_1 »

R_2 : « tirer une boule rouge de U_2 »

D : « tirer des boules de même couleur »

1) Calculer la probabilité $P(R_1 \cap R_2)$.
2) Vérifier que $P(\overline{D})=\frac{4}{7}$.
3) Soit S la somme des nombres portés par les boules tirées.

   a- Vérifier que les valeurs possibles de S sont : –3 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2.

   b- Calculer P(S < 0).

   c- Sachant que S < 0, calculer la probabilité que les boules tirées n'ont pas la même couleur.

IV- (3 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne le point $E(2;0)$ et les deux points variables $M(m\,;0)$ et $N(0\,;n)$ tel que $OM = EN$ avec m et n sont deux réels ($m \leq -2$ ou $m \geq 2$). P est le point tel que $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$.

Partie A

1) Vérifier que $m^2 = n^2 + 4$.
2) a- Trouver les coordonnées de P en fonction de m et n.
   b- Démontrer que P varie sur l'hyperbole (H) d'équation $4x^2 - y^2 = 4$.
3) Soit A et A′ les sommets de (H) ; F et F′ ses foyers.
   a- Trouver les coordonnées de A, A′, F et F′ ($x_A > 0$ et $x_F > 0$).
   b- Ecrire les équations des asymptotes de (H) et tracer (H).

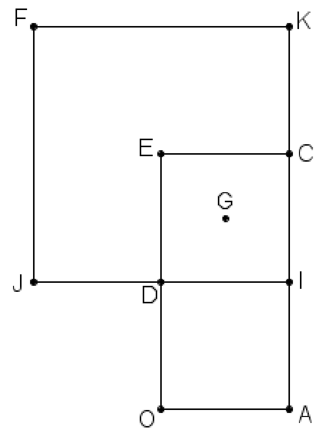
Partie B

Soit (E) l'ellipse dont A, A′ et $B(0;4)$ sont trois de ses sommets.

1) Tracer (E) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
2) La tangente en B à (E) coupe (H) en L avec $x_L > 0$.
   a- Démontrer que OFLB est un rectangle.
   b- Calculer l'aire du domaine intérieur au quadrilatère OALB et extérieur à (E).
3) Soit G le point tel que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OF}$. Démontrer que la droite (LG) est tangente à (H).

V- (3 points)

Dans la figure ci-contre :



- DICE et JIKF sont deux carrés directs de centres respectifs G et E.
- A est le symétrique de C par rapport à I.
- O est le symétrique de E par rapport à D.

Soit S la similitude plane directe qui transforme A en I et I en E.

Partie A

1) a- Montrer que le rapport de S est égal à $\sqrt{2}$ et que $\frac{\pi}{4}$ est un angle de S.
   b- Déterminer S(C).
2) a- $S \circ S$ est une similitude. Trouver un angle de $S \circ S$ et calculer son rapport.
   b- Trouver $S \circ S(A)$ et en déduire que O est le centre de S.
3) Les deux droites (OC) et (AD) se coupent en L. Soit L′ = S(L).
   Démontrer que les trois points I, D et L′ sont alignés.

Partie B

On suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})$.

1) Ecrire la forme complexe de S et déterminer l'affixe de G′ tel que G′ = S(G).
2) (T) est l'ellipse de centre I. Les points O et G sont deux sommets de (T).
   Soit (T′) l'image de (T) par S. Ecrire une équation de (T′).

VI- (7 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E): y' + y = 2 - e^{-x}$.

On pose $y = z + 2 - xe^{-x}$.

1) Former une équation différentielle (E′) satisfaite par z.
2) Trouver la solution particulière de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé, passe par le point A(– 2 ; 2).

Partie B

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = 2 - (x+2)e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   b- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Déduire une asymptote (d) à (C).

2) a- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

   b- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet deux racines α et 0.

   Vérifier que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$.

3) a- Montrer que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

   b- Ecrire une équation de la tangente (Δ) à (C) en son point d'inflexion.

4) Soit (d′) la droite d'équation y = – x.

   a- Vérifier que $f(x) + x = (x+2)\left(1 - e^{-x}\right)$.

   b- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (d′) et (C).

5) Tracer (d), (Δ), (d′) et (C).
6) a- Utiliser l'équation différentielle (E) pour trouver une primitive de f.

   b- En déduire l'aire du domaine limité par (C), (d′) et les deux droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

7) Soit g la fonction définie par g(x) = ln(–x – f(x)).

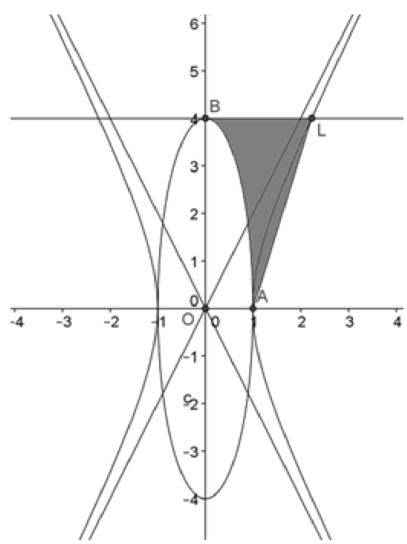
   Déterminer le domaine de définition de g.

عدد المسائل: ست | أسس التصحيح مادة الرياضيات

QI	Corrigé	Note
1	$\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x/5)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{5}$ **c**	**1**
2	$T'(x) = 2\sqrt{1+3(\ln 2x)^2}$; $T'(\frac{e}{2}) = 2\sqrt{1+3(\ln e)^2} = 2\sqrt{4} = 4$ **d**	**1**
3	$\lvert z'\rvert = \left\lvert\frac{z-2i}{iz+2}\right\rvert = \frac{\lvert z-2i\rvert}{\lvert iz+2\rvert} = 1$ **a**	**1**
4	$\frac{z'}{z} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$; alors OMM’ isocèle en O **b**	**1**

QII	Corrigé	Note
1	$2x_A + y_A + 2z_A - 5 = 0$ et $2x_B + y_B + 2z_B - 5 = 0$	**0,5**
2a	$\vec{V}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{V}\cdot\vec{N}_P = 0$ Ou $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{N}_P \;//\; \vec{V}$	**1**
2b	$J(0\,;0\,;\frac{5}{2})$ milieu de [AB] ; $(\Delta)\begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = -2k + \frac{5}{2}\end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$	**0,5**
3a	IJ = 3 ; $IJ^2 = 9$; $k^2 + 4k^2 + 4k^2 = 9$; $k = \pm 1$; k = 1 car $x_I > 0$; alors $I(1\,;2\,;\frac{1}{2})$	**1**
3b	$2x_E + y_E + 2z_E - 5 = 0$, alors $E \in (P)$; $IE^2 = 4 + 4 + 1 = 9$, IE = 3 = R	**1**
4	• $2t - 1 = -1$; $4t + 4 = 4$; $-4t + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. Donne t = 0, alors $E \in (D)$. • $\vec{V}_D\cdot\overrightarrow{IE} = 0$ alors $(D) \perp (IE)$ • $2(2t-1) + (4t + 4) + 2(-4t + \frac{3}{2}) - 5 = 0$, alors $(D) \subset (P)$ Donc (D) est tangente à (C) en E.	**1**

QIII	Corrigé	Note
1	$P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{21}$	**1**
2	$P(D) = P(R_1 \cap R_2) + P(V \cap 2V) = \frac{8}{21}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{3}{7}$, alors $P\left(\overline{D}\right)=\frac{4}{7}$	**1**
3a	-3 (V, 2V) ; -1 (V et (R , V)) ; 0 (R_1 et V) ; 1 (V , 2R) ; 2 (R_1 et R_2)	**1**
3b	$P(S < 0) = P(S = -3) + P(S = -1) = P(V , 2V) + P(V , (R\ \ V)) =$ $\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_7^2}+\frac{1}{3}\times\frac{4\times 3}{C_7^2}=\frac{5}{21}$	**1**
3c	$P\left(\overline{D}/_{S<0}\right)=\frac{P\left(\overline{D}\cap(S<0)\right)}{P(S<0)}=\frac{P(S=-1)}{P(S<0)}=\frac{\frac{4}{21}}{\frac{5}{21}}=\frac{4}{5}$	**1**

<table>
<tr><th>QIV</th><th colspan="3">Corrigé</th><th>Note</th></tr>
<tr><td>A1</td><td colspan="3">$EN^2 = OE^2 + ON^2$ alors $m^2 = 4 + n^2$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>A2a</td><td colspan="3">$P\left(\frac{m}{2};n\right)$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>A2b</td><td colspan="3">$m = 2x$ et $n = y$ donc $4x^2 - y^2 = 4$ ou $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>A3a</td><td colspan="3">$A(1;0)$ et $A'(-1;0)$; $F(\sqrt{5};0)$ et $F'(-\sqrt{5};0)$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>A3b</td><td colspan="3">Asymptotes: $y = 2x$ et $y = -2x$. Tracée de (H)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B2a</td><td>Tangente en B: $y = 4$.
$4x^2 = 16 + 4 = 20$; $x = \sqrt{5}$; $L(\sqrt{5};4)$; $x_F = x_L$;
$\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{OF}$ et $B\hat{O}F = 90^\circ$ donc OFLB est un rectangle.</td><td>0,5</td><td rowspan="3">B1
</td><td rowspan="3">0,5</td></tr>
<tr><td>B2b</td><td>$\text{Aire de OALB} = \frac{(1+\sqrt{5})\times 4}{2} = 2(1+\sqrt{5})$
Aire demandée =
$2(1+\sqrt{5}) - \frac{1}{4}\text{Aire de (E)} = 2(1+\sqrt{5}) - \pi$
unités d'aire.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B3</td><td>$G\left(\frac{\sqrt{5}}{5};0\right)$; $L(\sqrt{5};4)$;
$\text{pente de (GL)} = \sqrt{5}$; $4x^2 = y^2 + 4$
donc $8x = 2yy'$ et $y' = \frac{4x}{y}$.
$y'_L = \frac{4\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5} = \text{pente de (GL)}$.</td><td>1</td></tr>
</table>

QV	Corrigé	Note
A1a	$S : A \mapsto I$ $\quad I \mapsto E$ $\frac{IE}{AI} = \frac{IE}{IC} = \sqrt{2}$. Angle de S = $(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{IE}) = (\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IE}) = \frac{\pi}{4}$.	**0,5**
A1b	S(C) = F car C est le symétrique de A par rapport à I alors S(C) est le symétrique de I par rapport à E.	**0,5**
A2a	$S \circ S$ est une similitude de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.	**0,5**
A2b	$S \circ S(A)$ = S (I) = E, et on a OE = 2 OA ; $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{2}$; donc O est le centre de $S \circ S$,d'où O est le centre de S.	**1,5**
A3	S(A) = I, alors $S((AD))$ est une droite passant par I et faisant un angle $\frac{\pi}{4}$ avec (AD) alors c'est la droite (ID). $L \in (AD)$ donc $S(L) = L' \in (ID)$.	**1**
B1	z′= az + b , S est de centre O, donc b = 0, d'où z′ = a z. a = $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$; D'où z′ = (1 + i) z. $z_G = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ alors $z_{G'} = (1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) = -1 + 2i$.	**1**
B2	(T) est de centre I et des sommets O et G ; donc (T′) est de centre S(I) = E et des sommets S(O) = O et S(G) = G′. Par suite l'axe focale de (T′) est (OE) / / axe des ordonnées, E (0 ; 2), a = OE = 2 et b = EG′ = 1. D'où une équation de (T′) est $x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.	**1**

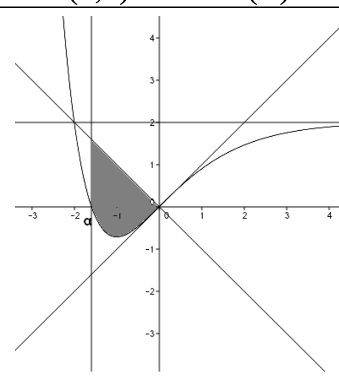
QVI	Corrigé	Note
A1	$y' + y = 2 - e^{-x}$; $y = z + 2 - xe^{-x}$; $y' = z' - (e^{-x} - xe^{-x})$; $(E') : z' + z = 0$	**0,5**
A2	La solution générale de (E') : $z = ke^{-x}$; La solution générale de (E) : $y = ke^{-x} + 2 - xe^{-x}$. y(–2) = (k + 2)$e^2$ + 2 = 2, donc k = –2. f(x) = 2 – (x + 2)e^{-x}. La solution particulière de (E) : $y(-2) = 2$ donc $k = -2$ d'où : $y = 2 - (x+2)e^{-x}$.	**1**
B1a	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	**0,5**
B1b	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$; (d) : $y = 2$ asymptote horizontale.	**1**

<table>
<tr><td>B2a</td><td>

$f'(x)=(x+1)e^{-x}$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow & 2-e \approx -0,7 & \nearrow & 2 \end{array}$$

</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B2b</td><td>Sur] $-\infty$, -1[: f est continue et strictement décroissante de $+\infty$ à $-0,7$ donc l’équation f(x) = 0 admet, dans] $-\infty$, -1[, une solution unique α et $f(-1,6)\times f(-1,5)=0,0187\times\left(-0,24\right)<0$, alors -1,6 < α < -1,5. De plus $f(0)=0$.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>B3a</td><td>f "(x) = $-e^{-x}(x+1)+e^{-x}=-xe^{-x}$
f "(x) = 0 pour x = 0 en changeant de signe du positif au négatif, alors O(0,0) est un point d’inflexion de (C).</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B3b</td><td>$f'(0)=1$; $y-0=1(x-0)$; $(\Delta): y=x$ est tangente à (C).</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>B4a</td><td>$f(x)+x=2-(x+2)e^{-x}+x=(x+2)(1-e^{-x})$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>B4b</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td></td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>x + 2</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$1-e^{-x}$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>f(x) + x</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>position</td><td>(C) est au dessus de (d')</td><td>(C) coupe (d') en (-2;2)</td><td>(C) est en dessous de (d')</td><td>(C) coupe (d') en (0;0)</td><td>(C) est au dessus de (d')</td></tr>
</table>
</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>B5</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ direction asymptotique parallèle à y’y.


</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>B6a</td><td>f '(x) + f(x) = 2 – e^{-x} ; f(x) = 2 – e^{-x} – f '(x) ; $\int f(x)dx=2x+e^{-x}-f(x)+c$ donc une primitive de f est $2x+e^{-x}-2+(x+2)e^{-x}=2x-2+(x+3)e^{-x}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B6b</td><td>$A=\int_{\alpha}^{0}[-x-f(x)]dx=-\dfrac{x^2}{2}-2x+2-(x+3)e^{-x}]_{\alpha}^{0}=-3+\dfrac{\alpha^2}{2}+2\alpha+(\alpha+3)e^{-\alpha}$ unités d’aire.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>B7</td><td>$-x-f(x)>0; x+f(x)<0;$ d’après B-4-b $-2<x<0$ ou bien : graphiquement.</td><td>1</td></tr>
</table>