عدد المسائل: اربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points

$A(3;1;0)$, $B(2;0;1)$, $S(3;-1;-2)$ et la droite (d) définie par: $\begin{cases} x = t \\ y = t+1 \quad ; \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -t \end{cases}$

1) a- Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (d) et que les deux droites (AB) et (d) sont parallèles.
   b- Montrer que $y+z-1=0$ est une équation du plan (P) déterminé par (AB) et (d).
2) a- Montrer que le point A est le projeté orthogonal du point S sur le plan (P).
   b- On désigne par S' le symétrique du point S par rapport à (P). Calculer l'aire du triangle BSS'.
3) On considère dans le plan (P) le cercle (C) de centre A et de rayon 3.
   La droite (d) coupe le cercle (C) en deux points E et F.
   a- Trouver les coordonnées des points E et F.
   b- Ecrire un système d'équations paramétriques d'une bissectrice de l'angle $\widehat{EAF}$.

II- (4 points)

Une urne U contient neuf boules :
- trois boules rouges numérotées **0**
- deux boules vertes numérotées **1**
- quatre boules bleues numérotées **2**.

Partie A

On tire simultanément et au hasard 3 boules de cette urne.

On considère les évènements suivants:

M: « les trois boules tirées sont de la même couleur »;
N: « le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égal à zéro ».

1) Calculer $P(M)$, la probabilité de l'évènement M.
2) a- Vérifier que $P(N) = \dfrac{16}{21}$.
   b- Calculer $P(M \cap N)$ et vérifier que $P(\overline{M} \cap N) = \dfrac{3}{4}$.
3) Sachant que les trois boules tirées n'ont pas la même couleur, calculer la probabilité que le produit des nombres portés par les trois boules tirées soit égal à zéro.

Partie B

Dans cette partie, on tire au hasard une boule de l'urne U.
On ne remet pas cette boule dans l'urne U.
- Si la boule tirée est numérotée **0**, on tire alors simultanément et au hasard deux boules de U.
  (On aura ainsi 3 boules)
- Si la boule tirée n'est pas numérotée **0**, on tire alors au hasard une boule de U.
  (On aura ainsi 2 boules)

Calculer la probabilité que la somme des nombres portés par les boules tirées soit égale à 3.

III- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives i, $-2i$, z et z' tel que $z'=\frac{-2iz}{z-i}$ avec $z\neq i$.

1) a- Montrer que $\left(z'+2i\right)\left(z-i\right)$ est réel.

   b- Déduire que $AM\times BM'=2$.

   c- Si M varie sur le cercle de centre A et de rayon 3, montrer que M' varie sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

2) Dans le cas où $z'=2i$, écrire z sous forme exponentielle.

3) On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

   a- Montrer que $x'=\frac{2x}{x^2+\left(y-1\right)^2}$ et $y'=\frac{-2\left(x^2+y^2-y\right)}{x^2+\left(y-1\right)^2}$.

   b- Si $AM=\sqrt{2}$, démontrer que $x=x'$.

IV- (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=\left(1-x\right)e^x+2$.

Soit $\left(C\right)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$. Déduire une asymptote $\left(d\right)$ à $\left(C\right)$.

   b- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$, puis calculer $f\left(1\right)$ et $f\left(2\right)$.

2) a- Vérifier que $f'\left(x\right)=-xe^x$ et dresser le tableau de variations de f.

   b- Démontrer que la courbe $\left(C\right)$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

3) Tracer $\left(d\right)$ et $\left(C\right)$.

4) Soit $\left(\Delta\right)$ la droite d'équation $y=2x$.

   a- Vérifier que $f\left(x\right)-2x=\left(e^x+2\right)\left(1-x\right)$. Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de $\left(C\right)$ par rapport à la droite $\left(\Delta\right)$.

   b- Trouver une primitive F de la fonction f.

   c- Tracer $\left(\Delta\right)$ puis calculer l'aire du domaine limité par $\left(C\right)$, l'axe des ordonnées et la droite $\left(\Delta\right)$.

5) Soit g la fonction donnée par $g\left(x\right)=\ln\left[f\left(x\right)-2\right]$.

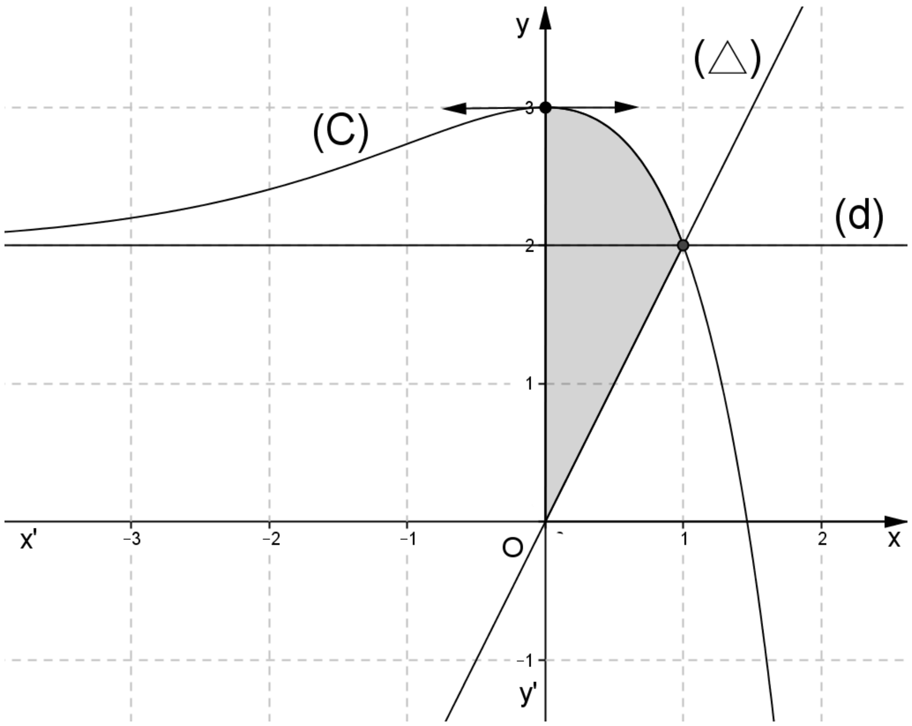
   On note $\left(G\right)$ la courbe représentative de g dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

   a- Vérifier que le domaine de définition de g est $\left]-\infty;1\right[$.

   b- Peut-on trouver un point de la courbe $\left(G\right)$ où la tangente à $\left(G\right)$ est parallèle à la droite $\left(\Delta\right)$? Justifier.

أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

Q.I	Eléments de réponses	4 pts
1.a	$3 = t$ et $1 = t + 1$ donc $t = 3$ et $t = 0$ impossible donc $A \notin (d)$. $\overrightarrow{AB}(-1\ ;\ -1\ ;\ 1) = -\vec{V}(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$ donc $(AB) \parallel (d)$.	¾
1.b	$A \in (P) : 1 + 0 - 1 = 0,\ 0 = 0$. $B \in (P) : 0 + 1 - 1 = 0,\ 0 = 0$. $(d) \subset (P) : t + 1 + (-t) - 1 = 0,\ 0 = 0$.	½
2.a	$A \in (P)$ et $\overrightarrow{AS}(0\ ;\ -2\ ;\ -2) = -2\overrightarrow{n_{(P)}}(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ donc $(AS) \perp (P)$ en A.	¾
2.b	Aire(BSS') = 2.Aire(BSA) = $2.\frac{1}{2}$.AB.AS = $\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$ unités d'aire.	½
3.a	$E \in (d)$ donc $E(t\ ;\ t + 1\ ;\ -t)$. $AE = 3$, $(t-3)^2 + t^2 + (-t)^2 = 9$ donc $t = 0$ et $t = 2$. Donc $E(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $F(2\ ;\ 3\ ;\ -2)$	**1**
3.b	AE = AF = rayon, donc AEF est isocèle en A. Soit I le milieu de [EF] donc $I(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$. $\overrightarrow{AI}(-2\ ;\ 1\ ;\ -1)$ est un vecteur directeur de la bissectrice. Alors $x = -2k + 3$, $y = k + 1$, $z = -k$ où $k \in \mathbb{R}$. **Autre méthode :** AE = AF = 3 donc $\vec{W} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$ est un vecteur directeur de la bissectrice. $\overrightarrow{AE}(-3\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{AF}(-1\ ;\ 2\ ;\ -2)$ donc $\vec{W}(-4\ ;\ 2\ ;\ -2)$. Alors $x = -4k' + 3$, $y = 2k' + 1$, $z = -2k'$ où $k' \in \mathbb{R}$.	½
Q.II	**Eléments de réponses**	**4 pts**
A.1	$P(M) = \frac{C_3^3}{C_9^3} + \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$	½
A.2.a	$P(N) = 1 - P(\overline{N}) = 1 - \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{16}{21}$	½
A.2.b	$P(M \cap N) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84}$. $P(\overline{M} \cap N) = P(N) - P(M \cap N) = \frac{16}{21} - \frac{1}{84} = \frac{3}{4}$	**1**
A.3	$P(N/\overline{M}) = \frac{P(\overline{M} \cap N)}{P(\overline{M})} = \frac{\frac{63}{84}}{1 - \frac{5}{84}} = \frac{63}{79}$	**1**
B	$P(S = 3) = P(R \cap (V \text{ et } B)) + P(B \cap (V)) + P(V \cap (B))$ $= \frac{C_3^1}{C_9^1} \times \frac{C_2^1 \times C_4^1}{C_8^2} + \frac{C_4^1}{C_9^1} \times \frac{C_2^1}{C_8^1} + \frac{C_2^1}{C_9^1} \times \frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{20}{63}$	**1**
Q.III	**Eléments de réponses**	**4 pts**
1.a	$(z'+2i)(z-i) = \left(\frac{-2iz}{z-i} + 2i\right)(z-i) = \frac{2}{z-i}(z-i) = 2$	¾
1.b	$AM.BM' = \|z-i\|\|z'+2i\| = 2$	½
1.c	$AM = 3, \|z-i\| = 3$, donc $BM' = \frac{2}{3}$ Donc M' varie sur le cercle de centre B et rayon $\frac{2}{3}$	½
2	$2i = \frac{-2iz}{z-i}$ donc $z = \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$.	¾
3.a	$x' + iy' = \frac{2i(x+iy)}{i-x-iy} = \frac{-2y+2ix}{-x+i(1-y)} = \frac{(-2y+2ix)(-x-i(1-y))}{x^2+(y-1)^2}$ $x' = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2}$, $y' = \frac{-2(x^2+y^2-y)}{x^2+(y-1)^2}$	**1**
3.b	Si $AM = \sqrt{2}$ alors $x^2 + (y-1)^2 = 2$ et $x' = x$.	½

<table>
<tr><th>Q.IV</th><th>Eléments de réponses</th><th>8 pts</th></tr>
<tr><td>1.a</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x - xe^x + 2) = 2$. Donc $y = 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>1.b</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $f(1) = 2$, $f(2) = 2 - e^2 = -5{,}33$.</td><td>¾</td></tr>
<tr><td>2.a</td><td>$f'(x) = -xe^x$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f '(x)</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>2</td><td>↗</td><td>3</td><td>↘</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>2.b</td><td>$f''(x) = -(x+1)e^x$ s'annule pour $x = -1$ en changeant de signe.
Donc $I(-1\ ;\ 2e^{-1} + 2)$ est un point d'inflexion.</td><td>¾</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4.a</td><td>$f(x) - 2x = (1-x)e^x + 2 - 2x = (1-x)(e^x + 2)$.
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f(x) – 2x</td><td>+</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>Position</td><td>(C) est au-dessus de (d)</td><td>(C) et (d) se coupent en $(-1\ ;\ 2)$</td><td>(C) est en dessous de (d)</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>4.b</td><td>$\int f(x)dx = (2-x)e^x + 2x + c$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4.c</td><td>L'aire = $\int_0^1 [f(x) - 2x]dx = (e-1)u^2$</td><td>¾</td></tr>
<tr><td>5.a</td><td>$f(x) - 2 > 0$ donc $x \in]-\infty; 1[$</td><td>½</td></tr>
<tr><td>5.b</td><td>$g'(x) = 2$, $\frac{f'(x)}{f(x)-2} = 2$, $x = 2$ inacceptable car $2 \notin]-\infty; 1[$.</td><td>¾</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>