المركز التربوي للبحوث والإنماء	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم : الرياضيات	المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: العلوم العامة نموذج رقم -١- المدّة : أربع ساعات

نموذج مسابقة (يراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدّل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطوّرة)

ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (2points)

Répondre par « vrai » ou « faux » et justifier.

1) Le complexe $(-1+i)^{10}$ est un réel.
2) La fonction f ′ définie sur ℝ par $f'(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{t^2+4}\,dt$ est la fonction dérivée d'une fonction f. On dit que la courbe de f n'admet pas un point d'inflexion pour x ∈ ℝ.
3) Si $f(x)=x^2e^x$, alors sa nième dérivée est $f^{(n)}(x)=\left(x^2+2nx+(n-1)\right)e^x$ pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$.
4) $1+i+...+i^{19}=0$ (i est un nombre imaginaire).

II- (2points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; i , j , k), on considère le plan (P) : 3x+y-5=0 et les droites (D) et (D') et les droites d'équations

$$(D):\begin{cases}x=t\\y=-3t+5\\z=t-4\end{cases}\qquad (D'):\begin{cases}x=m+1\\y=-2m-1\\z=-m+3\end{cases}$$

1)
   a) Vérifier que (P) est perpendiculaire au plan (xoy).
   b) Montrer que la droite (D) est incluse dans le plan (P).
2) Montrer que (D) et (D') se coupent en un point A dont on déterminera les coordonnées.

   Dans ce qui suit, on donne le point B (0 ; 1,4).
3) On considère dans le plan (Q) formé par (D) et (D'), le cercle (C) de centre A et de rayon AB.
   a) Ecrire une équation du plan (Q).
   b) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) tangente en B au cercle(C).
4) Calculer les coordonnées des points E et F points d'intersections du cercle (C) avec la droite (D).

III- (3points)

Dans une kermesse organisée par les classes terminales d'une école, on dispose de deux boites U et V.

- La boite U contient 10 cartes dont 3 portent la lettre A, 5 la lettre B et 2 la lettre C.
- La boite V contient 6 boules dont 2 rouges et 4 noires.

La règle de jeu est la suivante :

On tire au hasard une carte de la boite U.

- Si le joueur tire une carte A, il tire deux boules de la boite V successivement et avec remise
- Si le joueur tire une carte B, il tire deux boules de la boite V successivement et sans remise
- Le jeu s'arrête si le joueur tire une carte portant C ou il tire une boule noire.

On considère les événement suivants :

A : « tirer une carte portant A».

B : « tirer une carte portant B ».

C : « tirer une carte portant C ».

G : « le joueur gagne ».

Le joueur gagne seulement s'il tire 2 boules rouges successivement ou s'il tire une carte C.

1) Calculer P(G/A) et montrer que $P(G \cap A)=\frac{1}{30}$.
2) Calculer $P(G \cap B)$, puis P(G).
3) Pour participer à ce jeu, le joueur doit payer 2000 LL Il gagne 5000 LL s'il tire une carte portant C et 3000 LL en tirant 2 boules rouges.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a) Montrer que les trois valeurs de X sont -2000, 1000 et 3000.
b) Calculer la loi de probabilité de X.
c) Estimer le gain de l'organisateur, si 100 élèves participent à ce jeu.

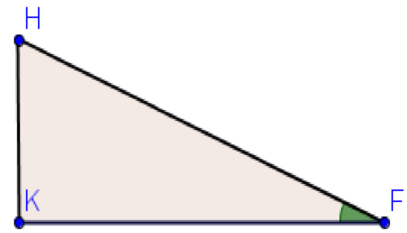
IV- (3 pts)

Dans le plan orienté, on donne, un rectangle $ABCD$ de centre O tel que $AB = 4cm$ **,** et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$.

Soit E le symétrique de A par rapport à D. S est la similitude plane directe telle que $S(E)=O$ et $S(A)=B$.

1) Vérifier que le rapport de la similitude est $k = \frac{1}{2}$ et déterminer la mesure de l'angle α de S.
2) Déterminer l'image de D par S. Montrer que C est le centre de S.
3) I est un point de $[EO]$, distinct de E et O ; et (Γ) est le cercle de centre I et qui passe par A. (Γ) coupe (AD) et (AB) respectivement en M et P.
   a) Dessiner (Γ) et placer les points M et P.
   b) Justifier que $C \in (\Gamma)$.
4) Soit N le projeté orthogonal de C sur (MP).
   a) Montrer que $(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$.
   b) En déduire que $S(M) = N$.
5) Prouver que B, N et D sont alignés.
6) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(A,\vec{u},\vec{v})$, avec $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.
   a) Déterminer les affixes des points B et C.
   b) Donner la forme complexe de S.

V- (3points)



Dans la figure ci-contre FKH est un triangle rectangle en K tel que FK=3cm et KH= $\sqrt{3}$ cm

Soit A un point sur [FK] tel que AK=1cm et soit A' symétrique de F par rapport à K.

(L) est une hyperbole du foyer F, de directrice (KH) et d'excentricité 2.

1)
   a) Déterminer l'axe focal de (L)
   b) Prouver que A et A' sont des sommets de (L).

2)
   Déterminer le centre O du (L) et le second foyer F'.
   Montrer que (OH) est une asymptote de (L) puis trouver la seconde asymptote.
   Tracer (L)

3) Soit G un point tel que $\overrightarrow{FG} = 2\sqrt{3}\overrightarrow{KH}$. Prouver que G est un point de (L).

4) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct$(0,\vec{u},\vec{v})$, avec $\vec{u} = \overrightarrow{OK}$.
   a) Vérifier que l'équation de (L) est : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.
   b) Prouver que (GK) est tangente à (L).

VI- (7pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$**.**

<u>(Partie A)</u>

On considère l'équation différentielle (E) définie par : $y' + y = 1 - 2e^{-x+1}$.

1) Déterminer les réels a et b tels que $Y = a + bxe^{-x}$ soit une solution particulière de (E).
2) Résoudre (E). En déduire la solution particulière (E) telle que $Y(1) = 0$.

<u>(Partie B)</u>

Soit g une fonction définie sur$[0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + (1-2x)e^{-x+1}$. (C) est sa courbe représentative.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. En donner une interprétation géométrique.
2) Calculer $g'(x)$ la dérivée de $g(x)$. Dresser le tableau de variations de g.
3) Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet deux racines 1 et α tel que $\alpha \in [2.25, 2.26]$. Vérifier que $e^{\alpha-1} = 2\alpha - 1$.
4) Résoudre $g(x) \leq 0$. En déduire les solutions de l'inéquation: $g(x^2) \leq 0$.
5) Tracer (C).
6) Calculer l'aire de la région délimitée par(C), la droite (Δ) d'équation $y = 1$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

(Partie C)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 1 + x + xe^{-x^2+1}$. (Γ) est sa courbe représentative et (d) est la droite d'équation $y = x + 1$.

1) Calculer $f(-x) + f(x)$. Que peut-on conclure?
2) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Montrer que (d) est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. Étudier la position relative de (Γ) et (d) .
3) Prouver que $f'(x) = g(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que $f(\sqrt{a}) = 1 + \frac{2a\sqrt{a}}{2a-1}$.
4) Dresser le tableau de variations de *f*.
5) Tracer (Γ).
6) Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $U_n = \int_0^1 [\int f(nx) - nx] dx$.
   - **a)** Calculer U_0.
   - **b)** Écrire U_n en fonction de *n*. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

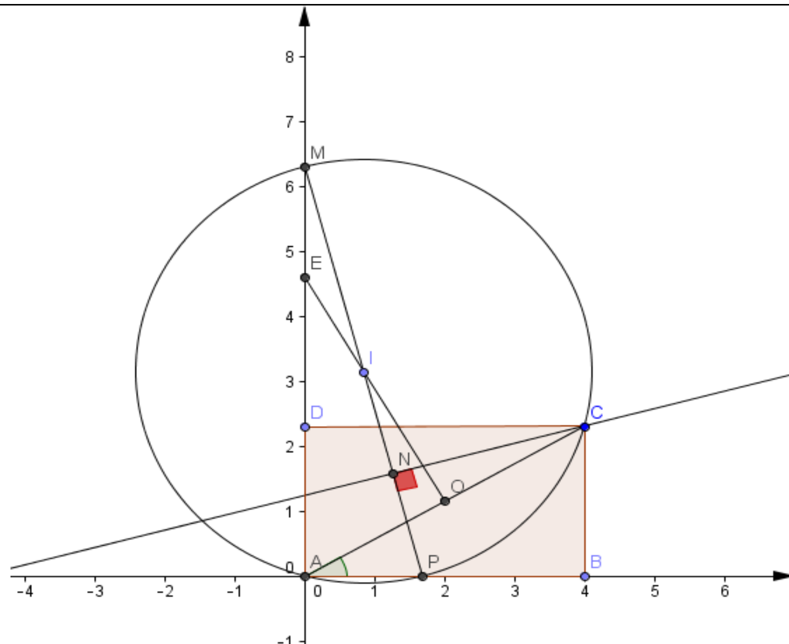
المركز التربوي للبحوث والإنماء	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم : الرياضيات	المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: العلوم العامة نموذج رقم -١- المدّة : أربع ساعات

أسس التصحيح (تراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدّل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطوّرة)

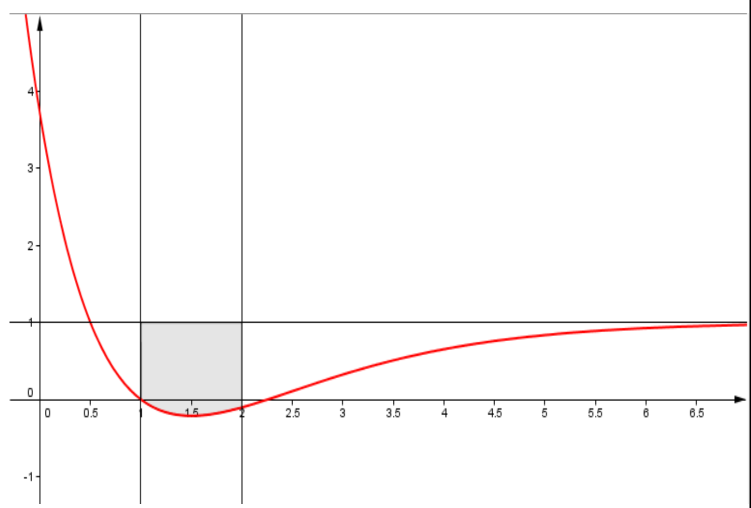
QI		Notes
1	Faux : sur l'axe des ordonnées	1
2	Faux : elle admet au point x=0 un point d'inflexion	1
3	Faux : pour n=2	1
4	Vrai : c'est une somme d'une suite géométrique du premier terme 1 et de raison q=i	1

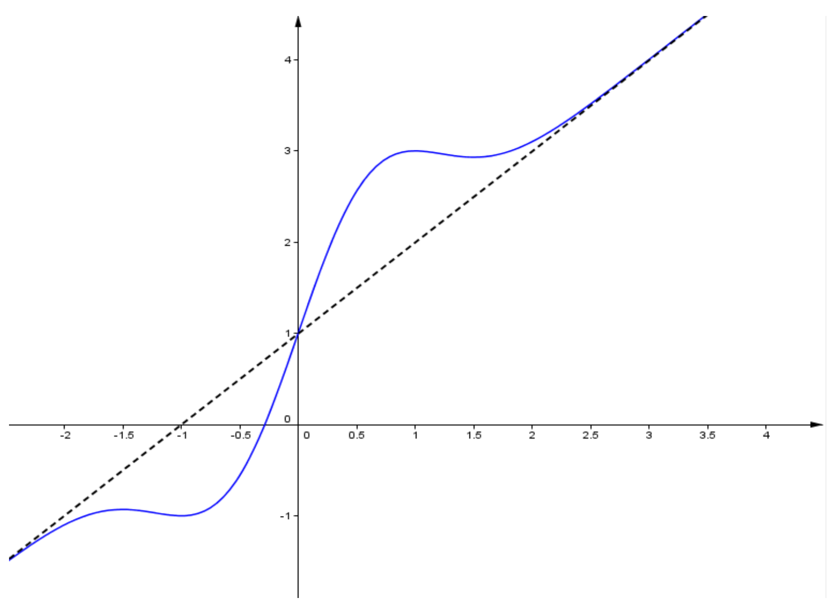
QII		Notes
1.a	$(3,1,0).(0,0,1)=0$ alors (P) perpendiculaire au plan (xoy)	0,5
1.b	3t-3t+5-5=0 $\Rightarrow (D)\subset(P)$	0,5
2	A(4,7,0) pour m=3 et t=4	0,5
3.a	(Q) :5x+2y+z-6=0	0,5
3.b	$\vec{u}=\overrightarrow{AB}\wedge\vec{n}$ avec $\vec{u}$ vecteur directeur de la tangente et $\vec{n}$ vecteur normal du (Q) $(\Delta):\begin{cases}x=0\\y=6\lambda+1\\z=-12\lambda+4\end{cases}$	1
4	$t=4+\dfrac{4\sqrt{66}}{11}$ et $t=4-\dfrac{4\sqrt{66}}{11}$	1

QIII		Notes
1	$\mathrm{P(G/A)}=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$. $\mathrm{P(G\cap A)=P(G/A)\times P(A)}=\frac{1}{9}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{30}$	1
2	$\mathrm{P(G\cap B)=P(G/B)\times P(B)}=\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$ P(G)=$\mathrm{P(G\cap A)+P(G\cap B)+P(C)}=\frac{4}{15}$	1 1
3.a	$-2000(\overline{\mathrm{G}})$, $1000(\mathrm{G\cap A}$ ou $\mathrm{G\cap B})$,3000(C).	1
3.b	<table><tr><td>x_i</td><td>-2000</td><td>1000</td><td>3000</td></tr><tr><td>$P(X=x_i)$</td><td>$\frac{11}{15}$</td><td>$\frac{1}{15}$</td><td>$\frac{1}{5}$</td></tr></table>	1
3.c	E(x) = -800 Alors le gain de l'organisateur est 800 × 100 = 80 000 LL	1

Q4		
1.	$k=\frac{OB}{EA}$, en utilisant le triangle équilatéral OBC: $k=\frac{BC}{2BC}$	
	$k=\frac{1}{2}$ **et** $\alpha=(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BO})=(BC,BO)=\frac{\pi}{3}\quad(2\pi)$	1
2	L'image de D par S , D 'est le milieu de $[BO]$. EAC est un triangle équilatéral. L'image du triangle EAC par S est le triangle équilatéral OBC de même sens, alors $S(C)=C$. De ce fait, C est le centre de S .	0,5
3.a		0.5
3.b	(OE) est la médiatrice de $[AC]$. I □ (OE), *donc* $IC=IA$, C □ (Γ).	0.5
.4.a	$\left(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}\right)=\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{6}\quad(2\pi)$.	0.5
.4.b	Le triangle MNC est équilatéral, donc $\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right)=\frac{\pi}{3}\quad(2\pi)$. et $CN=\frac{1}{2}CM$. alors $S(M)=N$.	1
5	$D\in(OB)$. M □ (EA), *donc* N □ (OB). B , N et D sont alignés. $\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right)=\frac{\pi}{3}\quad(2\pi)$	1
6.a	$Z_B=4$ *et* $Z_C=4+4\frac{\sqrt{3}}{3}i$	0.5
.6.b	$z'=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z+(1-\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}})(4+4\frac{\sqrt{3}}{3}i)$ $z'=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z+4$	0.5

Q5		
1.a	l'axe focal est (FK)	0.5
1.b	$\frac{AF}{AK}=2$ $\frac{A'F}{A'K}=2$ avec A et A 'appartiennent à (FK), l'axe focal.	1
2.a	o milieu de [AA'] F' symétrique de F par rapport à O	0.5
2.b	la tangente de l'angle formé par (OH) et l'axe focale est égale à $\sqrt{3}=\frac{b}{a}$ avec a=OA=2 C=OF=4 et $c^2=a^2+b^2$ la deuxième asymptote est symétrique à (OH) par rapport à la droite perpendiculaire en O.	1 0.5
2.c		0.5
3.	$\frac{GF}{d(G/(HK))}=2$ alors G appartient à (L)	0.5
4.a	a=2 et b= $2\sqrt{3}$,centre O et l'axe focal est x'ox.	0.5
4.b	G(4 ;6) et K(1,0) et (GK) : y=2x-2 qui est l'équation de la tangente en G à (L)	1
Q.6		
partie A		
1	$Y=a+bxe^{-x}$, Y : *vérifie* (E), donc $a=1$ et $b=-2e$	0.5
.2	La solution générale est: $y=ce^{-x}+Y=ce^{-x}+1-2xe^{-x+1}$ $y(1)=0$, *d'où* $c=e$. solution particulière: $y=1+(1-2x)e^{-x+1}$	1

partieB		
1	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$, donc $y=1$ est l'équation de l'asymptote horizontale.	0.5
2	$g'(x)=(2x-3)e^{-x+1}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \frac{3}{2} & & +\infty \\ \hline g'(x) & & - & \cdot & + & \\ \hline g(x) & 1+e & \searrow & -0.2 & \nearrow & 1 \end{array}$	1.5
3	$g(1)=0$, donc 1 est une racine. $g(2.25)=-2.77\times10^{-3}$ $g(2.26)=1.54\times10^{-3}$ g est continue et strictement décroissante sur $[2,25;2,26]$, $alors : \alpha\ est\ u$ $g(\alpha)=0$ si et seulement si $e^{\alpha-1}=2\alpha-1$	1
4	$g(x)\leq 0$ si et seulement si x □ $[1,\alpha]$ $g(x^2)\leq 0$ si et seulement si x^2 □ $[1,\alpha]$ si et seulement si x □ $[1,\sqrt{\alpha}]$	1
5		1.5
6	$A=\int_1^2\left[y_{(\Delta)}-g(x)\right]dx=\int_1^2\left[-(1-2x)e^{-x+1}\right]dx$ par une intégration par partie : $\int_1^2-(1-2x)e^{-x+1}dx=3-\frac{5}{e}\sim 1.1606$ $A=1,16u^2$	1
partie C		

1	$f(-x)+f(x)=2$ et $\mathbb{R}$ est centré en 0. $I(0,1)$	0.5
2	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_{(d)}\right]=0$ $f(x)-y_{(d)}=xe^{-x^2+1}\begin{cases} >0 & si\ x>0 \quad (\Gamma) \text{ au-dessus (d)} \\ =0 & si\ x=0 \quad (\Gamma) \text{ coupe (d)} \\ <0 & si\ x<0 \quad (\Gamma) \text{ au-dessous (d)} \end{cases}$	1
3	$f\ '(x)=g(x^2)$ $f(\sqrt{\alpha})=1+\dfrac{2\alpha\sqrt{\alpha}}{2\alpha-1}.$	0.5
4	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & 0 & & 1 & & \sqrt{\alpha} & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & & & 3 & & & & +\infty \\ & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ & 1 & & & & f(\sqrt{\alpha}) & & \end{array}$	1
.5		1.5
6.a	$U_0=\int_0^1 1dx=1$	0.5
6.b	$U_n=\int_0^1 (1+nxe^{-(nx)^2+1})dx=1+\int_0^1 (nxe^{-(nx)^2+1})dx$ $Posons\ v=-(nx)^2+1,\ donc\ dv=-2n^2xdx,\ nxdx=-\dfrac{dv}{2n}$	1

	$U_n = 1 + \int_1^{-n^2+1} -e^v \frac{dv}{2n} = 1 - \frac{1}{2n}\left(e^{-n^2+1} - e\right)$ $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$	