المركز التربوي للبحوث والإنماء	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم : الرياضيات	المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: العلوم العامة نموذج رقم -3- المدّة : أربع ساعات

نموذج مسابقة (يراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدّل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطوّرة)

ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

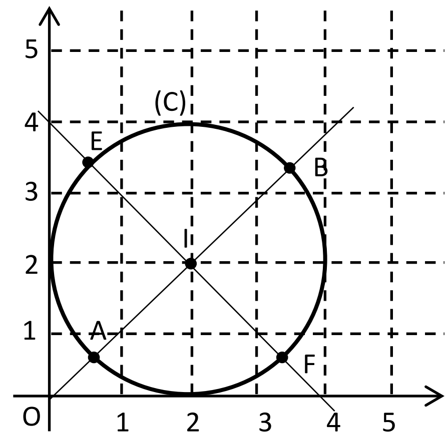
I- (2 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u};\vec{v})$
(C) est un cercle de centre I(2 ;2) et de rayon 2 ;

Dans la figure ci-contre :

- (D) et (D') sont deux droites d'équations respectives:
  $y = x$ et $y = -x + 4$;
- (D) coupe (C) en A et B;
- (D') coupe (C) en E et F.

Répondre à chacune des questions suivantes par vrai ou faux et
Justifier la réponse choisie.



1) L'affixe de B est: $Z_B = (\sqrt{2} + 2)e^{i(\frac{\pi}{4})}$

2) Les affixes des points I, F et B vérifient la relation: $Z_B = i\,(Z_F - 2 - 2i)$.

3) Si S est une similitude plane directe qui transforme A en B et I en F, alors la mesure de l'angle de SoS est $\frac{\pi}{4}$.

4) L'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient les deux conditions: $|z - 1| = |z - i|$ et $|z - 2 - 2i| = 2$ est le segment [AB].

II- (3 points)

Dans l'espace muni à un repère $(O\ ;\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ;\vec{k})$, on considère les points

A(2;1;0) ; B(0;1;3), la droite (d): $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases}$ $(t \in IR)$ et le plan (P): $3x - 4z = 0$

1) a. Montrer que (AB) et (d) sont non coplanaires.
b. Montrer que l'équation du plan (Q) contenant (d) et parallèle à (AB) est $y - 2 = 0$.
c. Calculer la distance de A à (Q).

2) a. Montrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires et déterminer un système d'équations paramétriques de la droite(Δ) intersection de (P) et (Q).
b. Soit S $(1;\ 2\ ;\frac{-3}{2})$un point dans l'espace. Montrer que S est équidistant à (P) et (d).

III- (2 points)
Une urne contient 4 boules noires, 3 boules blanches et n boules rouges. (n> 1)

Partie A: Dans cette partie, on suppose que n = 2.On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

1) Calculer la probabilité de tirer trois boules de même couleur.
2) Soit E l'évènement: "Des trois boules tirées, on obtient exactement deux boules de même couleur."
   Montrer que P(E) est égale à $\frac{55}{84}$.

Partie B: On tire simultanément et au hasard deux boules des (n + 7) boules.

On note par X la variable aléatoire qui est égale au nombre des boules rouges obtenues.

Montrer que P(X= 2) = $\frac{n(n-1)}{(n+6)(n+7)}$

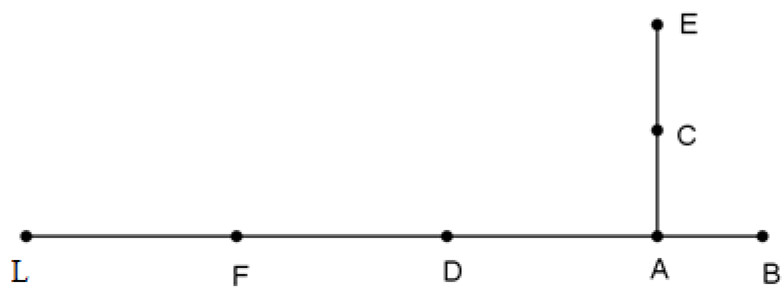
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer n sachant que l'espérance mathématique E(X) est égale à 1.

IV- (3 points)

Dans la figure ci-contre,(AE) et (BL) sont deux droites perpendiculaires tel que :

AB = AC = 1, AE = AD = DF = FG = 2.

Soit S la similitude directe du plan qui transforme A en D et C en F.



1) Déterminer le rapport et l’angle de S.
2) **a-** G est un point tel que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AE}$.
   Montrer que S(B) = G.
   b-Trouver S(E).
3) Soient H et K les milieux respectifs de [BE] et de [GL]. (AH) et (DK) se coupent en I ; (AH) et (DG) se coupent en O.
   a- Montrer que S(H) = K et S(D) = O.
   b- Déduire que I est le centre de S.
4) R est la rotation de centre B et d’angle $\frac{\pi}{2}$. J est le point d’intersection de (BG) et (AE).
   a- Quelle est la nature du SoR ?
   b- Montrer que J est le centre de SoR .

5) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

a- Déterminer la forme complexe de S et déduire l'affixe de I.

b- Déterminer l'affixe de O et comparer $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IA}$.

c- M est un point variable tel que $Z_M = x+2(1-x)\,i$ et M'= S(M).
Calculer $Z_{M'}$ et déduire que M' varie sur une droite dont on déterminera l'équation.

V- (3 points)

On Considère un triangle OBF rectangle en O tel que OF = 3 et OB = 4.

Soit M est un point variable du plan tel que $\left\|\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = 2MF$.

__Partie A__

1) Montrer que M varie sur une Hyperbole (H) de foyer F, directrice (OB) et d'excentricité e = 2, dont on précisera l'axe focal.

2) A est un point tel que $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$ et A' est symétrique de F par rapport à O.

a- Montrer que A et A' sont les sommets de (H).

b- Déduire le centre I de (H) et le second foyer F'.

3) Un cercle de centre I et de rayon 2 coupe (OB) en G et G'.
Montrer que (IG) et (IG') sont des asymptotes de (H).

4) a- C est un point défini par $\overrightarrow{FC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$. Prouver que C est un point de (H).

b- Calculer CF′− CF et déduire CF'.

c- Montrer que (OC) est une bissectrice de $F\hat{C}F'$.

d- Tracer (H).

__partie B__

On considère le système orthonormé $\left(I, \vec{i}, \vec{j}\right)$ avec $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$ et $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$.

1) Ecrire une équation de (H).

2) Ecrire les équations des asymptotes de (H).

3) (P) est la parabole de sommet V(0,2) et de foyer R(0,3).

a- Ecrire l'équation de (P).

b- Montrer que (P) est tangente à (H) en L(4 ;6) et en un autre point à déterminer.

VI- (7 points):

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

__Partie A__

1) a- Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b- Montrer que la courbe (C) a une direction asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$ suivant une droite (d) d' équation y = x

2) **a-** Montrer que $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ et construire le tableau de variations de f.

b- Vérifier que (d) est tangente à (C) en O et déterminer une tangente en x=1

c- Tracer (d) et(C) .

3) La fonction f admet sur IR une fonction réciproque notée f^{-1} et le point d'intersection de (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ appartient à la première bissectrice.

a- Résoudre l'inéquation $f(x) < x$. Déduire les valeurs de x pour que $f^{-1}(x) > x$.

b- Déterminer la direction asymptotique de la courbe de f^{-1}.

c- tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère.

4) Calculer $\int f(x)dx$. Déduire l'aire du domaine limité par les courbes de f et f^{-1} et les deux droites d'équations x = 4 et y = 4.

5) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=\frac{4}{1+x^2}$ et soit $h=f\circ g$.

a- Montrer que h est définie sur IR.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$. Déduire l'équation d'une asymptote à la courbe de h.

c- Calculer $h'(1)$.

<u>Partie B</u>

Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2+1) \end{cases}$ où n est un entier naturel.

1) **a-** Montrer que si $x\in[0;1]$ alors $f(x)\in[0;1]$.

b- Déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0\ ;1]$.

2) Etudier le sens de variation de la suite (u_n) .

3) **a-** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

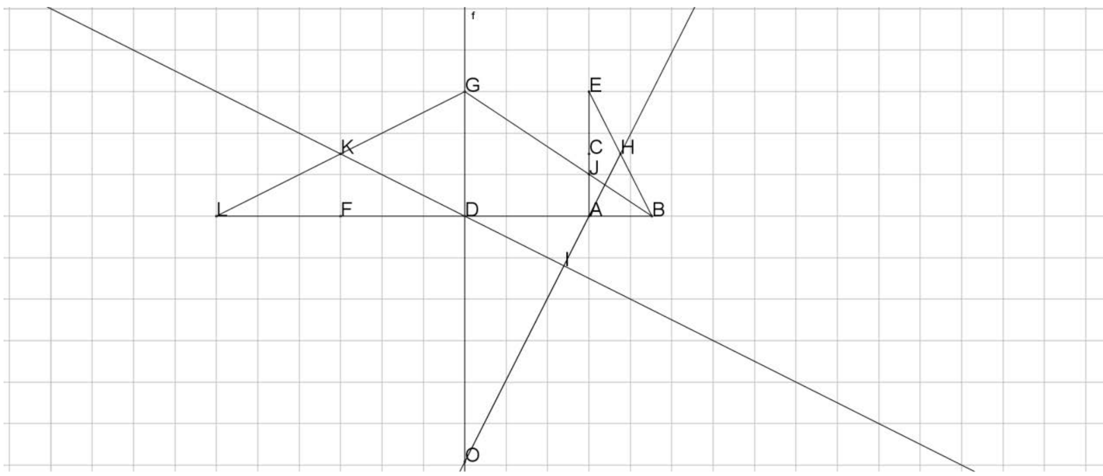
b- Déterminer la limite de la suite (U_n).

المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: العلوم العامة نموذج رقم -٣- المدّة : أربع ساعات	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم : الرياضيات	المركز التربوي للبحوث والإنماء

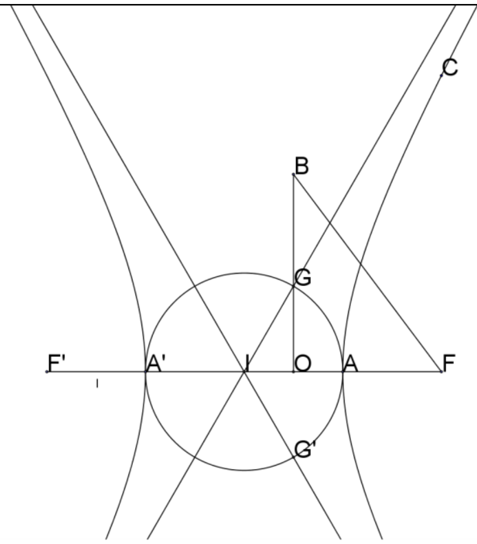
أسس التصحيح (تراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدّل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطوّرة)

	Question I	Note
1)	Faux L'affixe de B est: $Z_B = (\sqrt{2}+2)e^{i(\frac{\pi}{4})}$	**1**
2)	Faux Les affixes des points I, F et B vérifient la relation: $Z_B = i\,(Z_F - 2 - 2i) + 2 + 2i$	**1**
3)	Faux Une mesure de l'angle de SoS est $\frac{\pi}{2}$.	**1**
4)	Faux L'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient les deux conditions: $\lvert z-1\rvert = \lvert z-i\rvert$ et $\lvert z-2-2i\rvert = 2$ est {A,B}.	**1**
	Question II	**Note**
1-a	K(0;2;3) est un point de (d) et $\vec{KA}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{V}_d) \neq 0$ alors (d) et (AB) sont non-coplanaires.	**1**
1-b	$(d)\subset(Q)$ car $y = 2$; $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}_Q$ car $\vec{AB}\cdot\vec{n}_Q = 0$. $K(0;2;3)\in(d)$; $\vec{KM}\cdot(\overrightarrow{V_d}\wedge\overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x & y-2 & z-3 \\ 4 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$; y-2 = 0.	**1.5**
1-c	$d(A;(Q)) = \frac{\lvert 1-2\rvert}{\sqrt{1}} = 1$	**0.5**
2-a	$\vec{N}_P \perp \vec{n}_Q$ car $\vec{N}_P\cdot\vec{n}_Q = 0$. (P) et (Q) sont perpendiculaires. $(P)\cap(Q) = (\Delta)$ et (P):3x −4z =0 , (Q): Y −2 = 0 et z = m alors	**1.5**

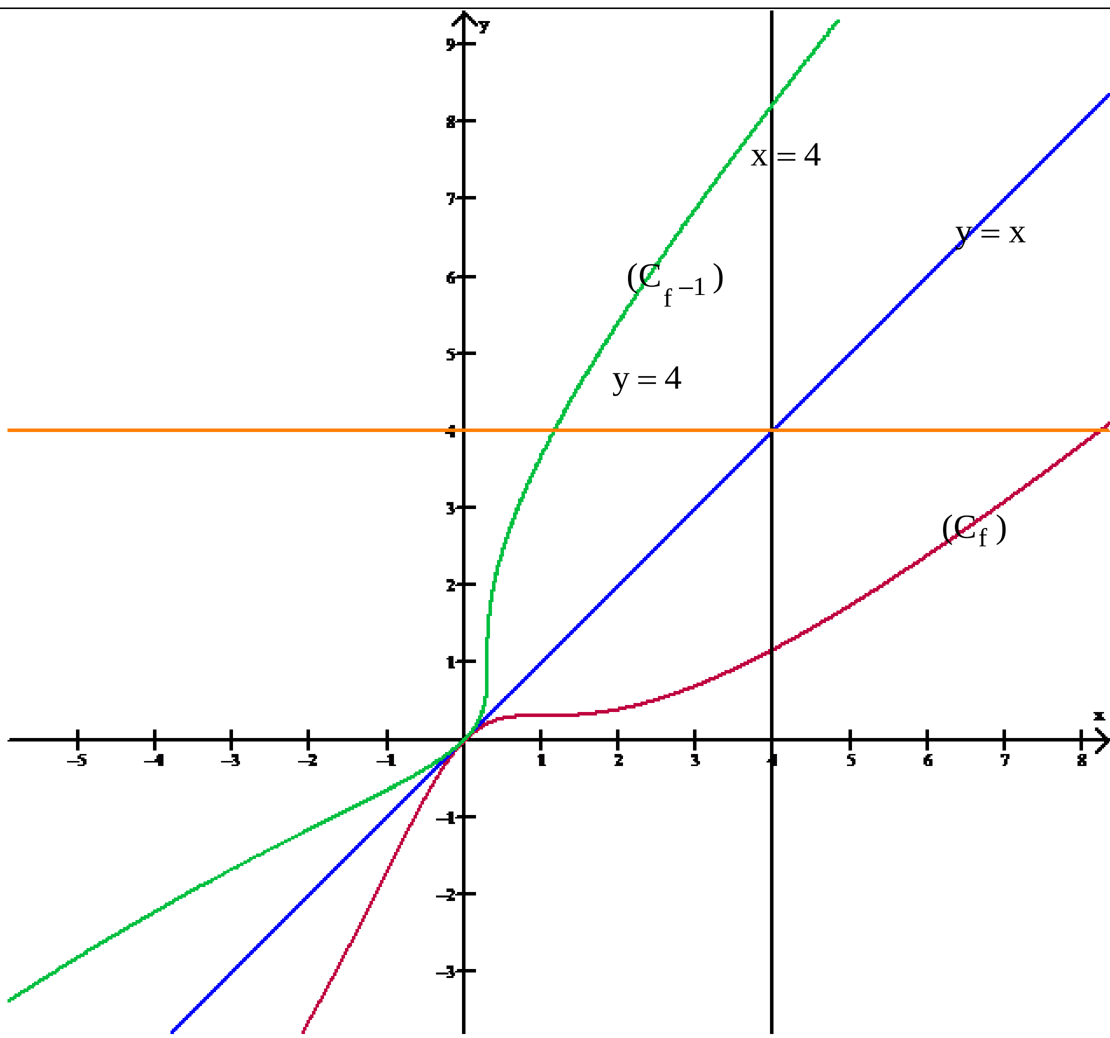
	x= $\frac{4}{3}m$ et y=2 alors (Δ) : $\begin{cases} x = \frac{4}{3}m \\ y = 2 \\ z = m \end{cases}$	
2-b	S(1;2;$\frac{3}{2}$) : K(0 ; 2 ; 3) $\vec{SK} \wedge \vec{V}_d = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3\vec{j}$ d(S ;(P)) = $\frac{\lvert 3-6 \rvert}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$ d(S ;(d)) = $\frac{\lVert \vec{SK} \wedge \vec{V}_d \rVert}{\lVert \vec{V}_d \rVert} = \frac{\lvert 3 \rvert}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$	**1.5**
	Question III	**4pts**
A-1	$\frac{C_3^3 + C_4^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$	**0.5**
A-2	P(E)= $\frac{C_3^2 . C_6^1}{C_9^3} + \frac{C_4^2 . C_5^1}{C_9^3} + \frac{C_2^2 . C_7^1}{C_9^3} = \frac{55}{84}$	**1**
B-1	P(X=2) = $\frac{C_n^2}{C_{n+7}^2}$ $=\frac{n(n-1)}{(n+6)(n+7)}$	**0,5**
B-2	P(X=0) = $\frac{C_7^2}{C_{n+7}^2}$ $= \frac{42}{(n+6)(n+7)}$ et P(X=1) = $\frac{C_n^1 C_7^1}{C_{n+7}^2}$ $=\frac{14n}{(n+6)(n+7)}$	**1**
B-3	E(X)=$\frac{2n^2+12n}{(n+6)(n+7)}$=1 alors n=7	**1**

	Question IV	
		
1	S est la similitude qui transforme A en D et C en F. Rapport $\frac{DF}{AC} = 2$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DF}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	**1**
2-a	$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DG}\right) = \frac{\pi}{2}; \frac{DG}{AB} = 2$ alors S (B) = G.	**0.5**
2-b	S(A) =D et S(C) =F or C est le milieu de [AE] alors S(C) est le milieu de S([AE]). Alors S(E)=L	**0.5**
3-a	H est milieu de [BE] ; alors S(H) = K est milieu de [GL] or S(A)=D ; alors (AH) $\perp$ (DK) . $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DO}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $\frac{DO}{DA} = tan D\hat{A}O =$ $tan A\hat{B}E = 2$ alors S(D)=O	**1**
3-b	$S(I) = S\big((AH) \cap (DK)\big) = (DK) \cap (OH) = I$	**0.5**
4-a	$SoR = S'(?, 2, \pi) = h(?, -2)$.	**0.5**
4-b	$B \xrightarrow{R} B \xrightarrow{S} G$ $or\, \overrightarrow{JG} = -2\overrightarrow{JB}$ alors J est le centre de SoR	**0.5**
5-a	z'=2iz-2 et $Z_I = \frac{-2}{5} - \frac{4i}{5}$	**0.5**

5-b	$Z_O = -2-4i \Rightarrow \overrightarrow{IO} = -4\overrightarrow{IA}$	**0.5**
5-c	$Z_{M'} = -6+4x+2ix$ et M' varie sur une droite d'équation x-2y+6=0.	**0.5**
	Question V	**Note**
	Partie A	
1	$\left\Vert \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{MB} \right\Vert = 2A_{MOB} = MH \times OB$ avec (MH) $\perp$ (OB) MH$\times$4=2MF$\Rightarrow \dfrac{MF}{d(M,OB)} = 2$ alors M varie sur une hyperbole de directrice (OB), e=2 et d'axe focal (OF).	**0.5**
2-a	AF=2AO , AF' = 6 = 2A'O or A et A' appartiennent à l'axe focal; alors A et A' sont les sommets de (H).	**0.5**
2-b	I milieu de [AA'] et F' symetrique de F par rapport à I.	**0.5**
3	$tan O\hat{I}G = \sqrt{3} = Pente\ de\ l'asymptote$. Alors (IG) et (IG') sont des asymptotes de (H).	**0.5**
4-a	FC = 6 = 2d(C,OB) alors C est un point de (H).	**0,5**
4-b	CF'–CF=AA'= 4 alors CF'=10.	**0.5**
4-c	$tan O\hat{C}F = \frac{1}{2} et\ tan F\hat{C}F' = \frac{4}{3}$ $tan\left(2O\hat{C}F\right) = \frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ alors $F\hat{C}F' = 2O\hat{C}F$ donc (CO) est bissectrice.	**0,5**

4-d	 	**0.5**
B		
1	$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$	**0.5**
2	$y = x\sqrt{3}$ et $y=-x\sqrt{3}$	**0.5**
3-a	$x^2 = 4\left(y-1\right)$	**0.5**
3-b	L(4 ;6) est un point commun de (P) et de (H). Pente de la tangente en L à (H) = pente de la tangente en L à (P) =2. donc (P) et (H) sont tangentes en L ; or (IV) est un axe de symétrie de (H) et de (P). Alors (H) et (P) sont tangentes en L'(-4 ;6).	**0.5**

	Question VI	**Note**
A1. a	et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	**0.5**
A1. b	$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-\infty$. $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ Donc, il y a une direction asymptotique suivant la droite d’équation y = x.	**0.5**

<table>
<tr>
<td>A2. a</td>
<td>
Tableau de variations $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ 1 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>f'(x)</td><td>+   0   +</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$</td></tr>
</table>
</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>A2. b</td>
<td>f(0) = 0 et y = x est une tangente en 0 et y = 1 tangente en x=1</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td>A2c</td>
<td>


</td>
<td>1+0.5</td>
</tr>
</table>

A3. a	f(x) < x alors $x \in IR \setminus \{0\}$, $f^{-1}(x) > x$ alors $x \in IR \setminus \{0\}$.	**0.5**
A3. b	Direction asymptotique suivant la droite d'équation y = x.	**0.5**
A3. c	Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.	**1**
A4	$\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - x\ln(x^2+1) + 2x - 2\arctan x + c$ u^2 $\text{Aire} = 16 - 2\left[\frac{x^2}{2} - x\ln(x^2+1) + 2x - 2\arctan x\right]_0^4 = 8\ln 17 + 4\arctan 4 - 16$	**2**
A5a	h est définie sur IR	**0.5**
A5b	; $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 2 - \ln 5$; y = $2 - \ln 5$ A.H. $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 2 - \ln 5$	**0.5**
A5c	f est dérivable en g(x) $h'(x) = f'(g(x) \times g'(x)$ *et* $h'(1) = \frac{-2}{5}$	**1**
B1a	si $x \in [0;1]$ alors $f(x) \in [0;1]$	**0.5**
B1b	Principe de recurrence.	**1**
B2	(U_n) strictement décroissante.	1
B3a	(U_n) strictement décroissante et strictement minorée par 0 alors elle est convergente.	**1**
B3b	Limite = 0.	**0.5**