

دورة سنة ٢٠٠٨ العادية	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم الحياة	وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات
الاسم: الرقم:	مسابقة في مادة الرياضيات المدة ساعتان	عدد المسائل : أربع

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I - (4 points)

Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = \sqrt{3} - i$, $b = \sqrt{3} + i$ et $c = 2i$.

- 1) Montrer que les trois points A , B et C sont sur un même cercle de centre O.
- 2) Ecrire $\frac{c-b}{a-b}$ sous formes algébrique et exponentielle.
- 3) Soit M un point de (P) privé de O, d'affixe $z = x + iy$ (x et y sont des réels).

On pose $Z = \frac{z-b}{z}$.

- a- Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que $|Z| = 1$.
- b- Vérifier que A et C appartiennent à (E).
- c- Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que Z est un imaginaire pur.

II- (4points)

Pour encourager le tourisme intérieur, une agence de tourisme propose à ses clients des week-ends de 2 jours avec trois options :

- Pension complète
- Demi-pension
- Pension de luxe.

L'agence publie l'annonce publicitaire suivante :

Option \ Destination	Pension complète	Demi-pension	Pension de luxe
Montagne	150 000 LL	100 000 LL	200 000 LL
Plage	100 000 LL	75 000 LL	150 000 LL

Cette agence estime que 65% de ses clients choisissent la montagne, et le reste la plage et que parmi les clients de chaque destination, 55% choisissent la pension complète, 30% choisissent la demi-pension, et le reste la pension de luxe.

On interroge au hasard un client.

Soit les événements suivants :

- A : « le client interrogé a choisi la montagne».
 B : « le client interrogé a choisi la plage».
 C : « le client interrogé a choisi la pension complète».
 D : « le client interrogé a choisi la demi-pension».
 S : « le client interrogé a choisi la pension de luxe».

- 1) a- Calculer les probabilités suivantes : $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$ et $P(C)$.
 b- Le client interrogé a choisi la pension complète, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la plage?
- 2) Soit X la variable aléatoire égale à la somme payée à l'agence par un client.
 a- Montrer que $P(X=150\,000) = 0,41$ et déterminer la loi de probabilité de X .
 b- Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Que représente le nombre ainsi trouvé?
 c- Estimer la somme reçue par l'agence lorsqu'elle sert 200 clients.

III- (4points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :
 $A(1; 2; 0)$, $B(2; 1; 3)$, $C(3; 3; 1)$, $D(5; -3; -3)$ et $E(-3; 7; 3)$.

- 1) Trouver une équation du plan (P) déterminé par A, B et C.
- 2) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DE).
- 3) Démontrer que (P) est le plan médiateur de [DE].
- 4) Démontrer que (BC) est orthogonale à (DE).
- 5) a- Calculer l'aire du triangle BCD.
 b- Calculer le volume du tétraèdre ABCD et déduire la distance de A au plan BCD.

IV- (8 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x - 1)e^x + 1$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (d) à (C).
 b- Etudier, suivant les valeurs de x , la position relative de (C) et (d).
 c- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et donner $f(2)$ sous forme décimale.
- 2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
- 3) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion W dont on déterminera les coordonnées.
- 4) a- Tracer (d) et (C).
 b- Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $(m - 1)e^{-x} = x - 1$.
- 5) Calculer l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
- 6) a- Montrer que la fonction f admet sur $[0 ; +\infty[$ une fonction réciproque g et tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
 b- Trouver l'aire du domaine limité par (G), l'axe des ordonnées et la droite (d).

Q :I	Corrigé	Note
1	$ a = b = c = 2$ donc $OA=OB=OC=2$.	0.5
2	$\frac{c-b}{a-b} = \frac{-\sqrt{3}+i}{-2i} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{i(\frac{\pi+\pi}{3})} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.	1
3a	$ Z =1$, ssi $BM = OM$ ssi M se trouve sur la médiatrice (E) de [OB].	1
3b	$AB=AO$ et $CB=CO$ donc A et C sont deux points de (E).	0.5
3c	$Z = \frac{x+iy-\sqrt{3}-i}{x+iy} = \frac{x^2+y^2-\sqrt{3}x-y}{x^2+y^2} + i \frac{-x+\sqrt{3}y}{x^2+y^2}$ <p>Z est imaginaire pur ssi $\begin{cases} x^2+y^2-\sqrt{3}x-y=0 \\ -x+\sqrt{3}y \neq 0 \end{cases}$</p> <p>M décrit un cercle privé de O et B.</p> <p>Ou $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} [\pi] = (\vec{u}, \overline{BM}) - (\vec{u}, \overline{OM}) = (\overline{OM}, \overline{BM}) [\pi]$.</p> <p>Donc M est un point de (F) cercle de diamètre [OB] privé de O et B.</p>	1

Q :II	Corrigé	Note										
1a	$P(A \cap C) = P(A) \times P(C/A) = 0,65 \times 0,55 = 0,3575$ $P(B \cap C) = P(B) \times P(C/B) = 0,35 \times 0,55 = 0,1925$ $P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = 0,3575 + 0,1925 = 0,55$ ou directement $P(C)=0,55$.	1										
1b	$P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{0,1925}{0,55} = 0,35$.	0.5										
2a	$P(X = 150\,000) = 0,65 \times 0,55 + 0,35 \times 0,15 = 0,41$. <table border="1" style="width:100%; border-collapse: collapse; margin-top: 5px;"> <tr> <td style="width:10%;">x_i</td> <td style="width:25%;">75 000</td> <td style="width:25%;">100 000</td> <td style="width:15%;">150 000</td> <td style="width:15%;">200 000</td> </tr> <tr> <td>P_i</td> <td>$0,35 \times 0,3 = 0,105$</td> <td>$0,35 \times 0,55 + 0,65 \times 0,3 = 0,3875$</td> <td>0,41</td> <td>$0,65 \times 0,15 = 0,0975$</td> </tr> </table>	x_i	75 000	100 000	150 000	200 000	P_i	$0,35 \times 0,3 = 0,105$	$0,35 \times 0,55 + 0,65 \times 0,3 = 0,3875$	0,41	$0,65 \times 0,15 = 0,0975$	1.5
x_i	75 000	100 000	150 000	200 000								
P_i	$0,35 \times 0,3 = 0,105$	$0,35 \times 0,55 + 0,65 \times 0,3 = 0,3875$	0,41	$0,65 \times 0,15 = 0,0975$								
2b	$E(X) = \sum p_i x_i = 0,105 \times 75\,000 + 0,3875 \times 100\,000 + 0,41 \times 150\,000 + 0,0975 \times 200\,000 = 127\,625$ La somme moyenne payée par un client est 127 625LL.	0.5										
2c	La somme estimée est $127\,625 \times 200 = 25\,525\,000$ LL.	0.5										

Q :III	Corrigé	Note
1	$\vec{N} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} (4; -5; -3)$, (P) : $\vec{AM} \cdot \vec{N} = 0$. Donc (P) : $4x - 5y - 3z + 6 = 0$.	0.5
2	(DE): $x = -8t + 5$; $y = 10t - 3$; $z = 6t - 3$.	0.5
3	Un vecteur directeur de (DE) est colinéaire à un vecteur normal de (P). Le milieu de [DE] (1;2;0) appartient à (P).	1
4	$\overline{DE}(-8;10;6)$ est perpendiculaire à $\overline{BC}(1;2;-2)$ ou puisque (DE) est perpendiculaire au plan (P).	0.5
5a	$\overline{DB} \wedge \overline{DC} = (-20;0;-10)$, aire = $\frac{1}{2} \sqrt{500} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.	0.5

5b	Volume = $\frac{1}{6} \vec{DA} \cdot (\vec{DB} \wedge \vec{DC}) = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$. $V = \frac{\text{base} \times h}{3}$, $\frac{25}{3} = \frac{5\sqrt{5} h}{3}$ donc $h = \sqrt{5}$	1
----	--	---

Q :IV	Corrigé	Note												
1a	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x + 1) = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C).	0.5												
1b	$f(x) - 1 = (x - 1)e^x$. <input type="checkbox"/> (C) rencontre (d) au point (1 ; 1) <input type="checkbox"/> Pour $x > 1$, (C) est au-dessus de (d) <input type="checkbox"/> Pour $x < 1$, (C) est au-dessous de (d).	0.5												
1c	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $f(2) = 8,389$.	0.5												
2	$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$. <table style="display: inline-table; border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">x</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">f'(x)</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">f(x)</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">1</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> </table> <p style="margin-left: 20px; margin-top: 5px;"> </p>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	f'(x)	-	0	+	f(x)	1	0	$+\infty$	1
x	$-\infty$	0	$+\infty$											
f'(x)	-	0	+											
f(x)	1	0	$+\infty$											
3	$f''(x) = (x + 1)e^x$; $f''(x)$ s'annule pour $x = -1$ en changeant de signe; par conséquent (C) a un point d'inflexion $W(-1, 1 - \frac{2}{e})$.	0.5												
4a		1.5												
4b	$(m - 1)e^{-x} = x - 1$ donne $m = (x - 1)e^x + 1$ <input type="checkbox"/> Pour $m < 0$; pas de solutions <input type="checkbox"/> Pour $m = 0$; une solution (double) <input type="checkbox"/> Pour $0 < m < 1$; deux solutions <input type="checkbox"/> Pour $m \geq 1$; une solution.	1												
5	$A = \int_0^1 [(x - 1)e^x + 1] dx = [(x - 2)e^x + x]_0^1 = (3 - e)u^2$.	1												
6a	f est continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, elle admet donc une fonction réciproque g. (G) est symétrique de (C) par rapport à la droite $y = x$.	1												
6b	L'aire A' du domaine limité par (G), l'axe des ordonnées et la droite (d) est égale (par symétrie) à l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, donc $A' = A = (3 - e)u^2$.	0.5												