وزارة التربية والتعليم العالي　　امتحانات الشهادة الثانوية العامة　　دورة سنة ٢٠٠٥ الاستثنائية
المديرية العامة للتربية　　فرع علوم الحياة
دائرة الامتحانات

عدد المسائل : أربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظـة : يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I- (4 points)

Dans Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$,
on donne les points E et F d'affixes $z_E = \frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$ et $z_F = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

1) a- Calculer $(z_E)^2$ et trouver le module et un argument de $(z_E)^2$.

b- Déterminer le module de z_E et vérifier que $-\frac{\pi}{12}$ est un argument de z_E.

c- Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

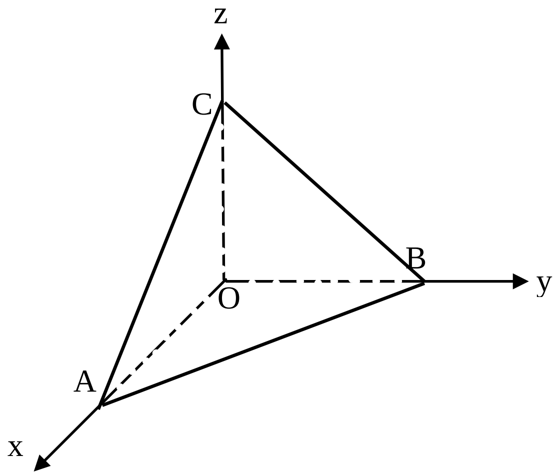
2) Soit $Z = \frac{z_E}{z_F}$.

a- Ecrire sous forme exponentielle z_E, z_F et Z.

b- Montrer que le triangle OEF est équilatéral.

II- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points A (4 ; 0 ; 0) , B (0 ; 4 ; 0) et C (0 ; 0 ; 4).



1) Ecrire une équation du plan (ABC).

2) Calculer l'aire du triangle ABC.

3) Soit F et G les milieux respectifs de [AC] et [BC].

a- Donner un système d'équations paramétriques de la droite (FG).

b- Le plan d'équation z = 0 et le plan (OFG) se coupent suivant une droite (d). Démontrer que les droites (d) et (FG) sont parallèles.

c- Calculer la distance entre les deux droites (d) et (AB).

III- (4 points)

les 80 élèves des classes terminales d'une école sont répartis dans trois sections SG , SV et ES selon le tableau suivant :

	SG	SV	ES
Filles	8	18	10
Garçons	12	14	18

La direction de l'école choisit au hasard un groupe formé de 3 élèves de ces classes pour participer à une émission télévisée.

1) Quel est le nombre de groupes possibles ?
2) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de garçons dans le groupe choisi. Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Montrer que la probabilité de choisir un groupe comprenant une fille de chaque section est $\frac{18}{1027}$.
4) Le groupe choisi est formé de 3 filles, quelle est la probabilité qu'elles soient d'une même section ?

IV- **(8 points)**

Soit f la fonction définie, sur IR, par : $f(x) = x + 2 - e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et démontrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C).

   b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et donner, sous forme décimale, les valeurs de $f(-1{,}5)$ et $f(-2)$.
2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse 0.
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique α et vérifier que $-0{,}5 < \alpha < -0{,}4$.
5) Tracer (d) , (T) et (C).
6) On désigne par g la fonction réciproque de f, sur IR.

   a- Tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

   b- On désigne par $A(\alpha)$ l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

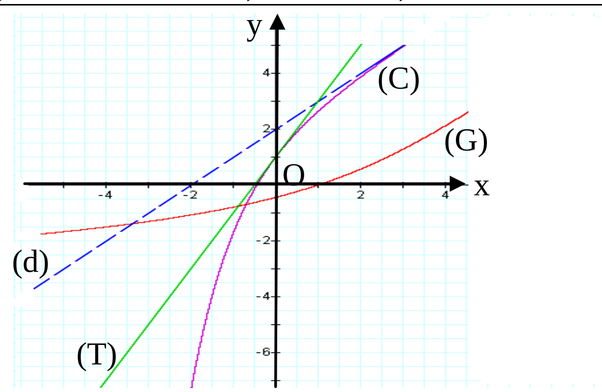
   Montrer que $A(\alpha) = (-\frac{\alpha^2}{2} - 3\alpha - 1)$ unités d'aire.

   c- Déduire l'aire du domaine limité par la courbe (G), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Q1	Eléments des réponses	N
1.a	$z_E^2 = \frac{1}{16}(3+1+2\sqrt{3}-3-1+2\sqrt{3}-4i) = \frac{1}{16}(4\sqrt{3}-4i) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$ $z_E^2 = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $\left\|{z_E}^2\right\| = \frac{1}{2}$; $\arg({z_E}^2) = -\frac{\pi}{6}$.	1
1.b	$\left\|{z_E}^2\right\| = \frac{1}{2}$ d'où $\left\|z_E\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\arg({z_E}^2) = 2\arg(z_E) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\arg(z_E) = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, comme $R_e(z_E) > 0$ et $Im(z_E) < 0$ donc $\arg(z_E) = -\frac{\pi}{12}$.	1
1.c	$z_E = \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})] = \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(\frac{\pi}{12}) - i\sin(\frac{\pi}{12})] = \frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$ $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.	½
2.a	$z_E = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$, $z_F = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $Z = e^{i(-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4})} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$	½
2.b	$\|Z\| = 1 = \frac{OE}{OF}$; OE = OF $\arg(Z) = \arg(z_E) - \arg(z_F) = (\vec{u}, \vec{OE}) - (\vec{u}, \vec{OF})\ [2\pi] = (\vec{OF}, \vec{OE})\ [2\pi] = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Le triangle OEF est équilatéral. • OU : $EF = \|z_F - z_E\| = \frac{1}{\sqrt{2}} = OE = OF$	1

Q2	Eléments des réponses	N
1	$\vec{AM}.(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$; $\begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$; $x + y + z - 4 = 0$	1
2	$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}\\\| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \\\| = 2\sqrt{3}\ u^2$	½
3.a	F(2 ;0 ;2) et G(0 ; 2 ; 0) (FG) : x = – 2t , y = 2t + 2 , z = 2.	½
3.b	Le plan z = 0 est le plan (AOB) , (FG) // (AB) donc (FG) // (OAB), comme (d) est la droite d'intersection de (OFG) et (OAB) , alors (FG) //(d). • OU :l'équation de (OFG) est : $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $x + y - z = 0$. (d) $\begin{cases} x = m \\ y = -m \\ z = 0 \end{cases}$ $\vec{V_d}(1;-1;0)$, $\vec{FG}(-2;2;0)$ donc $\vec{FG} = -2\vec{V_d}$ et les droites (d) et (FG) sont distinctes alors elles sont parallèles.	1
3.c	La distance entre (d) et (AB) est la distance de O à (AB) car (d) passe par O et (d) //(AB), d'où $d = \frac{\\\|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\\\|}{\\\|\vec{AB}\\\|} = 2\sqrt{2}u$.	1

Q3	Eléments des réponses	N
1	Nombre de cas possibles : $C_{80}^{3} = 82\,160$.	½
2	x_i : 0 ; 1 ; 2 ; 3 p_i : $\frac{C_{36}^{3}}{C_{80}^{3}} = \frac{7140}{82160}$; $\frac{C_{36}^{2} \times C_{44}^{1}}{C_{80}^{3}} = \frac{27720}{82160}$; $\frac{C_{36}^{1} \times C_{44}^{2}}{C_{80}^{3}} = \frac{34056}{82160}$; $\frac{C_{44}^{3}}{C_{80}^{3}} = \frac{13244}{82160}$	1½
3	$\frac{C_{8}^{1} \times C_{18}^{1} \times C_{10}^{1}}{C_{80}^{3}} = \frac{18}{1027}$.	1
4	p(les filles sont de même section / 3 filles) = $\frac{C_{8}^{3} + C_{18}^{3} + C_{10}^{3}}{C_{36}^{3}} = \frac{243}{1785} = 0{,}136$.	1

Q4	Eléments des réponses	N
1.a	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} (-e^{-x}) = 0$ donc la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C) .	1
1.b	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$; $f(-1{,}5) = -3{,}981$; $f(-2) = -7{,}389$.	1
2	$f'(x) = 1 + e^{-x}$ x : $-\infty$ … $+\infty$ $f'(x)$: $+$ $f(x)$: $-\infty \nearrow +\infty$	1
3	(T) : $y = f'(0)x + f(0)$; $y = 2x + 1$.	½
4	f est continue,strictement croissante sur IR et passe de $-\infty$ à $+\infty$, donc l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α. $f(-0{,}5) \times f(-0{,}4) = -0{,}148 \times 0{,}1081 < 0$ donc $-0{,}5 < \alpha < -0{,}4$.	1
5		1½
6.a	Voir figure.	½
6.b	$A(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{0} (x + 2 - e^{-x})\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + e^{-x}\right]_{\alpha}^{0} = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - e^{-\alpha}$ Or $f(\alpha) = 0$ c.à.d. $\alpha + 2 - e^{-\alpha} = 0$ donc $e^{-\alpha} = \alpha + 2$ d'où $A(\alpha) = (-1 - 3\alpha - \frac{\alpha^2}{2})\,.\,u^2$	1
6.c	Le domaine limité par (G) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x = 0 et x = 1 , est symétrique du domaine précédent par rapport à la droite d'équation y = x , donc l'aire demandée est aussi égale à $A(\alpha)$.	½