المركز التربوي للبحوث والإنماء	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم : الرياضيات	المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة ـ فرع الاجتماع والاقتصاد نموذج رقم -2- المدّة : ساعتان

نموذج مسابقة (يراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدّل للعام الدراسي 2016-2017 وحتى صدور المناهج المطوّرة)

ارشادات عامة : - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة.

I- (4 points)
L'Organisation des Nations Unies a créé en 2010 une enquête statistique sur la population mondiale. Le tableau suivant montre le résultat obtenu suite à cette étude.

année	1970	1980	1990	2000	2010
Classement de l'année x_i	1	2	3	4	5
Population (en million des personnes) : y_i	3 023	4 438	5 290	6 115	6 908

1) Représenter graphiquement la nuage de dispersion des points $(x_i ; y_i)$.
2) Le pourcentage d'augmentation de la population mondiale entre les années 2010 et 2013 est de 3,47%. Calculez la population en 2013.

3) Pour chaque année, calculer $\ln y_i$ et compléter le tableau suivant :

an	1970	1980	1990	2000	2010
x_i	1	2	3	4	5
$z_i = \ln y_i$					

4) Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite de régression de z en termes de x.
5) Déduire de l'ajustement précédent que l'expression de la population y en fonction du rang x, est sous la forme de: $y = Ee^F$ avec E et F sont deux réels à déterminer.
6) Estimer la population mondiale en 2030.

II- (5 points)
Partie A
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 900$ **et** $u_{n+1} = 0.6u_n + 200$ pour tout $n \in IN$
1) Monter que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) On considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in IN$, $v_n = u_n - 500$.
  a) Montrer que (v_n) est géométrique dont on déterminera sa raison et son premier terme
  b) Prouver que $u_n = 400\times(0.6)^n + 500$.
  c) Etudier les variations de la suite (u_n)
  d) Calculer la limite de la suite (u_n).

Partie B
Dans un pays donné, deux entreprises A et B partagent le marché des communications.

Les clients choisissent, le 1er janvier, soit A soit B, avec un contrat d'un an à la fin duquel ils seront libres de choisir à nouveau A ou B.

La société A dispose de 90% du marché et la société B, qui vient de se lancer de 10% de celui-ci. Nous estimons que, chaque année, 20% des clients de A changent en B, tandis que 20% des clients de B changent en A.
Considérons une population qui est représentée par 1 000 clients en l'an 2000. Ainsi, 900 clients sont inscrits en A et 100 clients sont enregistrés en B.
Nous souhaitons étudier l'évolution de cette population dans les années à venir.

1) Vérifier que la société A compte 740 clients en 2001
2) Calculer le nombre des clients de B en 2002.
3) On note a_n le nombre des clients de A dans l'année (2000 + n).
a) Etablir que $a_{n+1} = 0.6a_n + 200$.
b) En utilisant les résultats obtenus de la **partie A**, que pouvez-vous attendre quant à l'évolution du marché de la communication dans ce pays?

III- (4 points)
Les sièges d'un cinéma sont entièrement occupés. Le film proposé est une relecture d'une Comédie de blockbuster. Dans cette salle, les hommes représentent 25% des spectateurs et les femmes $\frac{2}{5}$ des spectateurs. Le reste des spectateurs sont des enfants.

$\frac{1}{5}$ des hommes et 30 % des femmes ont déjà vu ce film.
A la fin du film, un spectateur est interrogé par hasard.
On considère les événements suivants:
H : « Le spectateur interrogé est un Homme».
F : «Le spectateur interrogé est une femme ».
E : «Le spectateur interrogé est un Enfant ».
V : « Le spectateur interrogé a déjà vu le film ».

1) **a)** Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $V \cap H$.
b) Calculer $P(V/H)$ et déduire $P(V \cap H)$.

2) La probabilité de l'événement V est égale à 0,4.
a) Déterminer la probabilité que le spectateur interrogé soit un enfant qui ait vu ce film avant.
b) Sachant qu'il s'agit d'un enfant, calculer la probabilité que le spectateur interrogé ait vu ce film avant

3) Des binômes de spectateurs ont été interrogés au hasard, les uns après les autres, avec remplacement. On note X la variable aléatoire égale aux nombres des spectateurs qui ont vu ce film auparavant.
a) Prouver que $P(X = 1) = 0.48$.
b) Déterminer la loi de probabilité de X.

4) 1000 personnes ont vu cette relecture du film. On choisit au hasard et simultanément 3 spectateurs parmi ces 1000.
a) Quelle est la probabilité que les trois personnes interrogées soient des femmes.
b) Sachant que les trois personnes interrogées sont des hommes, calculer la probabilité qu'ils n'aient pas vu ce film auparavant.

IV- (8 points)
Part A
On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln(x+1)$ et soit

(C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer f(1), f(7) et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Prouver que $f'(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Déduire que f est décroissante et dresser le tableau de variation

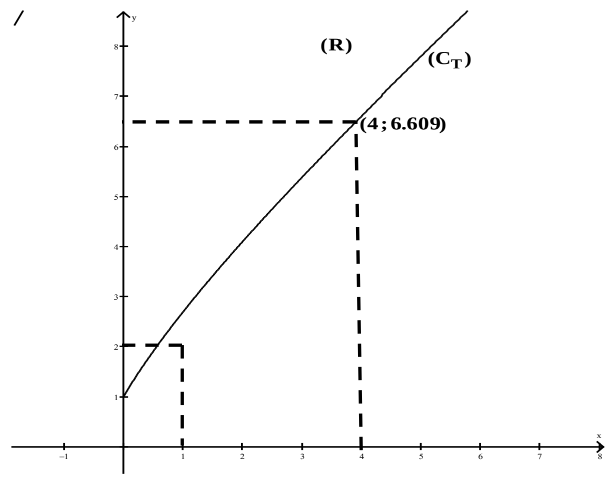
3) Ecrire l'équation de (T) tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

4) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α. Vérifier que 2.1 < α < 2.2.

5) Tracer la tangente (T) et la courbe (C).

Partie B (Dans le suite $\alpha = 2.15$)

Une entreprise produit des cahiers.
la fonction du profit P, en millions de L.L, est donnée par P(x) = f(x).
On note par x la quantité produite de cahiers (en miliers).
les courbes C_T (coût total) et R(revenue) en millions de L.L sont représentées dans cette figure.
($x \geq 0$)



1) Calculer la perte maximale de cette enterprise.

2) En utilisant la figure :

a) calculer le coût fixe de cette enterprise.

b) calculer le coût moyen du production d'un cahier lors de la production de 400 cahiers.

3) On admet que la fonction R est définie par R(x) = ax.

a) utiliser la figure pour montrer que a = 2.

b) Déduire que 2000 L.L est le prix d'un cahier.

4) Prouver que α est la solution de l' équation $R(x) = C_T(x)$.
Déduire le nombre minimum de cahiers à produire pour réaliser un gain.

5) Montrer que la fonction C_T est définie par $C_T(x) = x + 1 + \ln(x+1)$.

المركز التربوي للبحوث والإنماء	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم : الرياضيات	المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة ـ فرع الاجتماع والاقتصاد نموذج رقم -2- المدّة :

أسس التصحيح (تراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدّل للعام الدراسي 2016-2017 وحتى صدور المناهج المطوّرة)

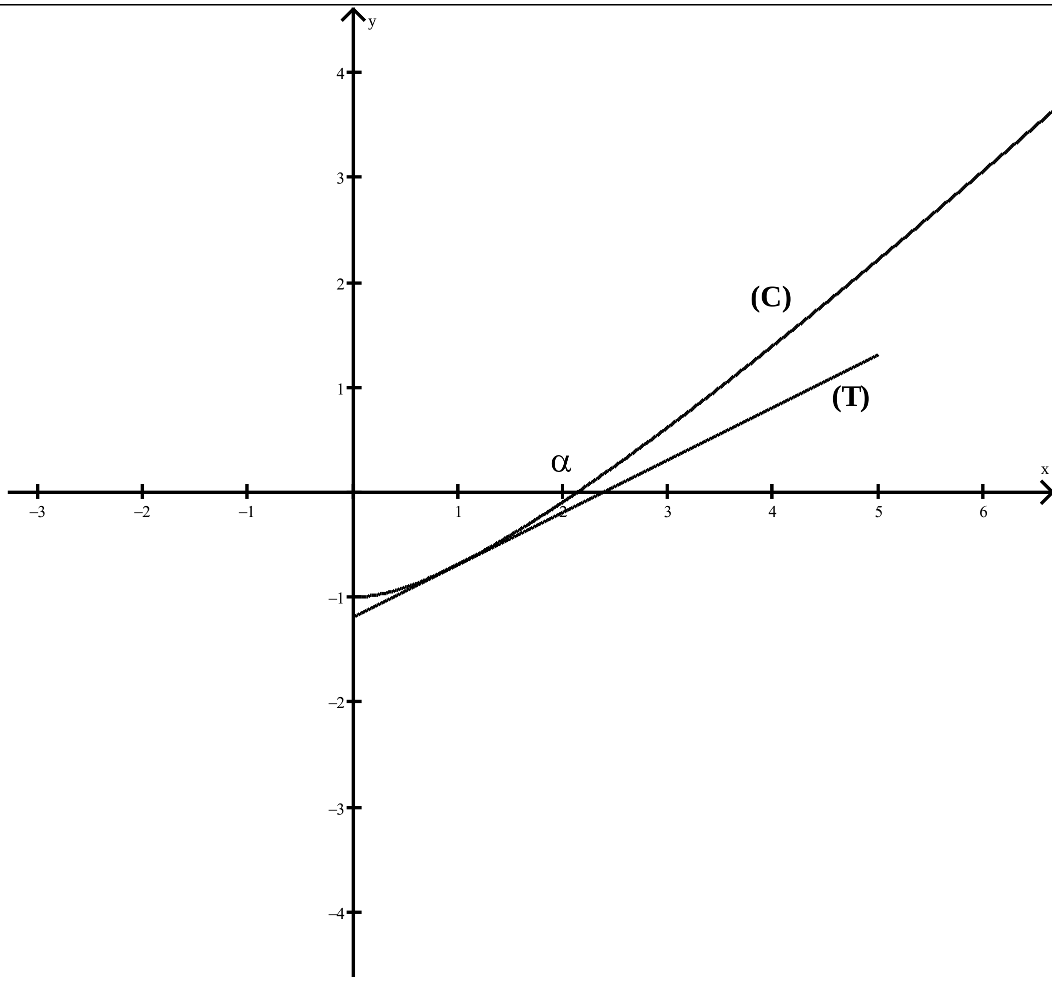
QI	Réponses	Mark
1	graphe	1
2	la population en 2013 est de 7147 millions de personnes alors il y a 7147707600 personnes.	1.5
3	<table><tr><td>année</td><td>1970</td><td>1980</td><td>1990</td><td>2000</td><td>2010</td></tr><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>$z_i = \ln y_i$</td><td>8.014</td><td>8.397</td><td>8.573</td><td>8.718</td><td>8.840</td></tr></table>	1
4	z = 0.1973x + 7.9165	1/2
5	$y = e^{0.1973x+7.9165} = e^{0.1973x} \times e^{7.9165} = 2742.156e^{0.1973x}$; E = 2742.156 et F = 0.1973.	1.5
6	x = 7 alors y = 10911.79944 millions de personnes alors il y a 10911799440 personnes.	1.5

QII	Réponses	Mark
A1	$u_1 = 740$; $u_2 = 644$ $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ $u_2 / u_1 \neq u_3 / u_2$	1
A2a	q = 0.6 et le premier terme est $v_0 = 400$	1
A2b	$u_n = 400\times(0.6)^n + 500$.	1/2
A2c	(u_n) est decroissante.	1
A2d	La limite = 500 car $0 \prec q \prec 1$ et $\lim q^n = 0$	1/2

B1	La société A compte 740 clients en 2001.	1/2
B2	La société B compte 356 clients en 2002.	1/2
B3	$a_{n+1} = 0.6a_n + 200$.	1
B4	Le nombre des clients de A diminue mais reste plus de 500 tandis que le nombre des clients de B augmente mais reste inférieur à 500, A et B n'auront jamais le même nombre de clients.	1

QIII	**Réponses**	**Mark**
1a	$V \cap H$ représente que le spectateur interrogé est un homme qui a déjà vu ce film, une fois au moins.	1/2
1b	$P(V/H) = \frac{1}{5}$; $P(V \cap H) = \frac{1}{20}$	1/2 1/2
2a	$P(V \cap E) = 0.23$	1/2
2b	$P(V/E) = \frac{23}{35}$	1/2
3a	$P(X = 1) = 0.48$	1
3b	$P(X = 1) = 0.48$; $P(X = 0) = 0.36$ et $P(X = 2) = 0.16$	1/2 1/2
4a	$P(3F) = 0,063$	1
4b	$P(3\overline{V}/H) = 0.51$.	1.5

QIV	**Réponses**	**Mark**
A1	$f(1) = -0.69$; $f(7) = 3.9$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	1/4 1/4 1/2
A2	$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0$ donc f est strictement croissante $\begin{array}{c\|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & & & +\infty \\ & -1 & \nearrow & \end{array}$	1/2 1/2 1
A3	(T) : $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \ln 2$	1

A4	dans $[0;+\infty[$ f est définie comme continue et strictement décroissante en passant par - à+ donc l'équation f(x) = 0 admet une solution unique. f(2.1) = -0.03 < 0 et f(2.2) = 0.03 > 0.	1/2 1/2
A5		2
B1	P´(x) = 0 ; perte maximale = 1000000 L.L en utilisant la courbe (C).	1
B2a	$C_T(0) = 1$ million de L.L ainsi 1000000 L.L	1/2
B2b	$C_T(4) = 6.609$ millions L.L alors 6609000 L.L le coût moyen = 1652,25 L.L	1/2 1
B3a	R(1) = 2 alors a = 2	1/2
B3b	$R(x) = \frac{(.prix) \times x \times 100}{1000000} = 2x$; prix= 2000 L.L	1.5
B4	$R(x) = C_T(x)$ donne P(x) = 0 alors f (x) = 0 ainsi x = α = 2.15. alors 2150 cahiers. Par conséquent, 2151 cahiers est le nombre minimal de cahiers à vendre pour que l'entreprise réalise un gain.	1.5
B5	$C_T(x)$ = R(x) - P(x) ; $C_T(x) = x+1+\ln(x+1)$.	1/2