عدد المسائل: ستة	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظـة : يُسمح بإستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو إختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I-(1,5 pts.)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant,** la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	La solution particulière de l'équation différentielle $y' - \frac{1}{2}y = 0$, qui vérifie $y(-2) = 1$, est :	$y = -2e^{\frac{x}{2}}$	$y = e^{\frac{x}{2}+1}$	$y = 2\cos x - \sin x$	$y = \sqrt{x^2 - 3}$
2	$f(x) = 2\sin(\pi x + 2)$. La période de f est : T =	π	2	2π	$\frac{\pi}{2}$
3	L'équation $2\ln x = \ln(2x)$ admet :	2 racines	Une racine unique	Aucune racine	3 racines
4	Si $f(x) = \ln\lvert -3x \rvert$, alors $f'(x) =$	$\frac{3}{x}$	$\frac{-3}{x}$	$\frac{1}{\lvert x \rvert}$	$\frac{1}{x}$
5	$e^{\frac{1}{2}\ln 9} \times e^{-\ln\frac{1}{3}} =$	e^3	6	$e^{\frac{3}{2}}$	9
6	$\cos^2(\frac{1}{2}\arccos x) =$	$\frac{1+x}{2}$	$1 + \frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}x$	$(1+x)^2$

II-(2,5points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$, on donne :

le point A(2 ; -2 ; 0) , le plan (P) d'équation x + y - 2z + 2 = 0

et la droite (d) définie par : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t \\ z = -t+1 \end{cases}$ (t est un paramètre réel).

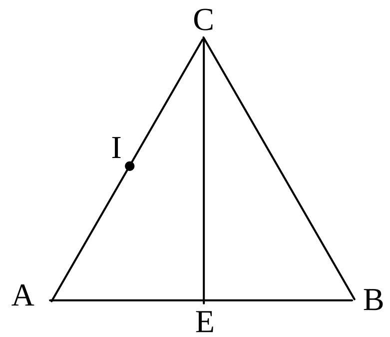
On désigne par H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P).

1) a- Déterminer les coordonnées de B, point d'intersection de la droite (d) avec le plan (P).
   b- Vérifier que A est un point de (d).
   c- Ecrire une équation du plan (Q) contenant la droite (d) et perpendiculaire au plan (P) et en déduire un système d'équations paramétriques de la droite (BH) .
   d- Calculer la distance de A à (P).

2) a- Calculer le sinus de l'angle $\widehat{ABH}$.
   b- Calculer l'aire du triangle ABH.

III- (3points)

Dans un plan orienté, on donne un triangle équilatéral direct ABC de côté 4 cm.
On désigne par E et I les milieux respectifs de [AB] et [AC].
Soit S la similitude plane directe qui transforme A en E et E en C.



1) a- Déterminer le rapport et un angle de S.
   b- Construire l'image par S de chacune des droites (AC) et (EI) et en déduire l'image de I par S.

2) Le plan est supposé rapporté à un repère orthonormé direct $(A\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

   a- Donner la forme complexe de S.
   b- Trouver l'affixe du point W centre de S.
   c- Démontrer que W est un point de [AC].
   d- On désigne par J l'image de I par $S \circ S$, comparer WC et WJ.

IV- (3points)

Un porte-monnaie contient exactement :

quatre billets de 10 000 LL,

deux billets de 50 000 LL

et trois billets de 100 000 LL.

A- On tire **simultanément** et au hasard **trois billets** de ce porte-monnaie.

1) Quelle est la probabilité de l'événement E : « tirer trois billets de 100 000 LL. » ?

2) Quelle est la probabilité de l'événement F: « tirer deux billets de 10 000 LL et un billet de 50 000 LL. » ?

B- On désire régler un achat de 100 000 LL. Pour cela on tire du porte-monnaie au hasard, **un à un**, et **sans remise**, des billets jusqu'à obtenir une somme égale au moins à 100 000 LL . On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de billets qu'on a dû ainsi tirer du porte-monnaie.

1) a- Calculer les probabilités suivantes : $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.
   b- Justifier que 6 est la valeur maximale de X .

2) Quelle est la probabilité de tirer au moins trois billets pour régler l'achat de 100 000 LL?

V- (3points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\vec{v}\,)$, on associe à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z) = z^2 - (3 - i)z + 4 - 3i$.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1) Déterminer les points M tels que $f(z) = 0$.

2) Calculer x' et y' en fonction de x et y.

3) a- Démontrer que , lorsque M' décrit l'axe des ordonnées, le point M décrit la courbe (C) d'équation $x^2 - y^2 - 3x - y + 4 = 0$.
   b- Déterminer la nature de (C) et préciser son centre I .
   c- Déterminer les sommets , les foyers , les asymptotes et les directrices de (C).
   d- Tracer la courbe (C) .
   e- Ecrire une équation de la tangente (T) et une équation de la normale (N) à la courbe (C) au point E(2 ; 1) .

VI- (7points)

Soit f la fonction définie, sur $]\frac{1}{e}\,;+\infty[$, par $f(x)=\dfrac{x}{1+\ln x}$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$; *(unité : 2 cm)* .

A- 1) Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

2) Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.

3) a- Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion W d'abscisse e.
b- Ecrire une équation de la tangente (d) à (C) au point W.

4) Etudier suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et de la droite (D) d'équation y = x .

5) Tracer (d), (D) et (C).

B- Soit l'intervalle I = [1 ; e].

1) a- Démontrer que f(I) est inclus dans I.
b- Etudier le signe de $f'(x)-\dfrac{1}{4}$ et en déduire que, pour tout x de I, $0\le f'(x)\le\dfrac{1}{4}$.
c- Démontrer que, pour tout x de I, on a : $|f(x)-1|\le\dfrac{1}{4}|x-1|$.

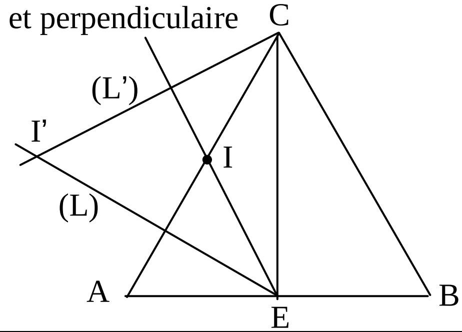
2) Soit (U_n) la suite définie par :
$U_0=2$ et pour tout $n\ge0$, $U_{n+1}=f(U_n)$.
a- Démontrer par récurrence sur n que U_n appartient à I.
b- Démontrer que $|U_{n+1}-1|\le\dfrac{1}{4}|U_n-1|$.
c- Démontrer que $|U_n-1|\le\dfrac{1}{4^n}$ et en déduire la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

S.G-MATHS

$2^{ème}$ Session 2005

QI	Eléments de réponses		N
1	$y' - \frac{1}{2}y = 0$; $y = C\,e^{\frac{x}{2}}$, $y(-2) = Ce^{-1} = 1$; $C = e$; $y = e^{\frac{x}{2}+1}$	b	3
2	$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$	b	
3	$2\ln x = \ln 2x$; $2\ln x = \ln 2 + \ln x$; $\ln x = \ln 2$; $x = 2$	b	
4	$f'(x) = \frac{-3}{-3x} = \frac{1}{x}$	d	
5	$e^{\ln\sqrt{9}} \times e^{\ln 3} = 3 \times 3 = 9$	d	
6	$\cos^2(\frac{1}{2}\arccos x) = \frac{1+\cos(\arccos x)}{2} = \frac{1+x}{2}$. (ou en prenant x = 0)	c	

QII	Eléments de réponses	N
1.a	$t + 1 - 2t + 2t - 2 + 2 = 0$; $t = -1$; $B(0 ; 2 ; 2)$.	½
1.b	Pour $t = 1$; $A(2 ; -2 ; 0)$ est un point de (d).	½
1.c	Une équation de (Q) est donnée par : $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{N}_P \square \overrightarrow{V}_d) = 0$; $\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $5x + y + 3z - 8 = 0$. $(BH) = (P) \cap (Q)$; $\begin{cases} x+y-2z+2=0 \\ 5x+y+3z-8=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{-5}{4}m + \frac{5}{2} \\ y = \frac{13m}{4} - \frac{9}{2} \\ z = m \end{cases}$	1 ½
1.d	$d(A ;(P)) = \frac{\lvert 2-2+2 \rvert}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$	½
2.a	$\sin A\hat{B}H = \frac{AH}{AB} = \frac{2/\sqrt{6}}{\sqrt{24}} = \frac{1}{6}$	1
2.b	$Aire(ABH) = \frac{1}{2} AB \times AH \sin B\hat{A}H = \frac{1}{2} AB \times AH \cos A\hat{B}H$ $\cos A\hat{B}H = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6}$ $Aire(ABH) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times \frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{3}\ u^2$ •OU : Aire (ABH) = $\frac{1}{2} \lVert \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AH} \rVert$, en cherchant les coordonnées de H.	1

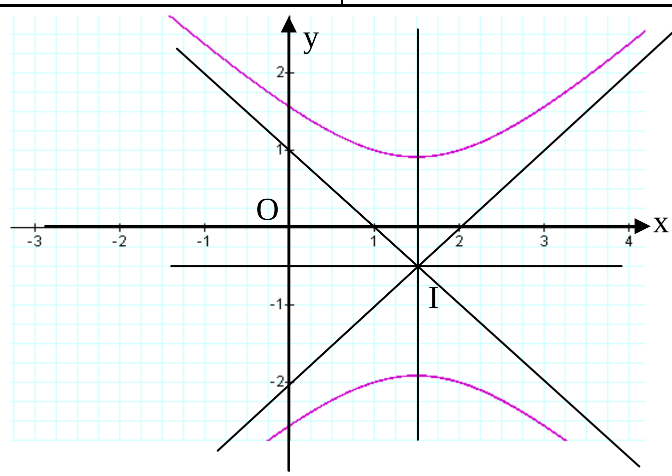
QIII	Eléments de réponses	N
1.a	$S(A) = E$ et $S(E) = C$, $k = \frac{EC}{AE} = \frac{(4\sqrt{3})/2}{4/2} = \sqrt{3}$ et $\alpha = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{2}$	1
1.b	L'image de (AC) est la droite (L) passant par E et perpendiculaire à (AC). L'image de (EI) est la droite (L') passant par C et perpendiculaire à (EI). L'image de I sera le point d'intersection des deux droites (L) et (L').  	2
2.a	$z_A = 0$ et $z_E = 2$ $z' = i\sqrt{3}z + b$ avec S(A) = E ; b = 2 donc $z' = = i\sqrt{3}z + 2$ • OU : $z_C = 2 + 2i\sqrt{3}$; $z' = az + b$ avec $\begin{cases} 2 = 0 + b \\ 2 + 2i\sqrt{3} = 2a + b \end{cases}$, b = 2 et $a = i\sqrt{3}$	1
2.b	$z_W = i\sqrt{3}\ z_W + 2$; $z_W = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.	½
2.c	$\frac{z_W - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{4}$. $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AW}$ donc W est un point de [AC] et W est le milieu de [AI].	½
2.d	S o S est la similitude plane de centre W, d'angle π et de rapport 3, c'est donc une homothétie de centre W et de rapport – 3 . $\overrightarrow{WJ} = -3\overrightarrow{WI} = 3\overrightarrow{WA}$; $\overrightarrow{WC} = -3\overrightarrow{WA}$; WJ = WC.	1

QIV	Eléments de réponses	
A.1	$P(E) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84}$	1
A.2	$P(F) = \frac{C_4^2 \times C_2^1}{C_9^3} = \frac{12}{84} = \frac{1}{7}$	1
B.1.a	P(X = 1) = P(tirer un billet de 100 000) = $\frac{3}{9}$ P(X = 2) = P(10 000 , 100 000) + P(50 000 , 100 000) + P(50 000 , 50 000) $= \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$	2
B.1.b	Le nombre de tirages est maximal lorsqu'on obtient dans les cinq premiers tirages : 4 billets de 10 000 et 1 billet de 50 000 , ce qui justifie que la valeur maximale de X est 6.	1
B.2	p(tirer au moins 3 billets) = 1 – [p(X=1) + p(X=2)] = 1 – [$\frac{3}{9} + \frac{5}{18}$] = $\frac{7}{18}$.	1

QV	Eléments de réponses	
1	z’ = 0 pour $z^2 - (3 - i)z + 4 - 3i = 0$; $\Delta = -8 + 6i = (1 + 3i)^2$ $z_1 = \frac{3 - i + 1 + 3i}{2} = 2 + i$ et $z_2 = \frac{3 - i - 1 - 3i}{2} = 1 - 2i$	1
2	$x' + iy' = x^2 - y^2 - (3 - i)(x + iy) + 4 - 3i$; $x' = x^2 - y^2 - 3x - y + 4$ et $y' = 2xy - 3y + x - 3$	1
3.a	pour x’ = 0 on a $x^2 - y^2 - 3x - y + 4 = 0$;	½
3.b	$(x - \frac{3}{2})^2 - (y + \frac{1}{2})^2 = -2$; (C) est une hyperbole équilatère de centre $I(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.	1
3.c	Par translation de vecteur $\vec{OI}(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ l’équation devient $Y^2 - X^2 = 2$; $a = b = \sqrt{2}$, $c^2 = 2a^2 = 4$; $c = 2$.	1

	Dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$	Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Sommets	$A(0, \sqrt{2})$; $A'(0, -\sqrt{2})$	$A(\frac{3}{2}, \sqrt{2} - \frac{1}{2})$; $A'(\frac{3}{2}, -\sqrt{2} - \frac{1}{2})$
Foyers	$F(0, 2)$; $F'(0, -2)$	$F(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$; $F'(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$
Asymptotes	$Y = X$ ou $Y = -X$	$y = x - 2$ ou $y = -x + 1$
Directrices	$Y = \frac{a^2}{c} = 1$ ou $Y = -1$	$y = \frac{1}{2}$ ou $y = -\frac{3}{2}$

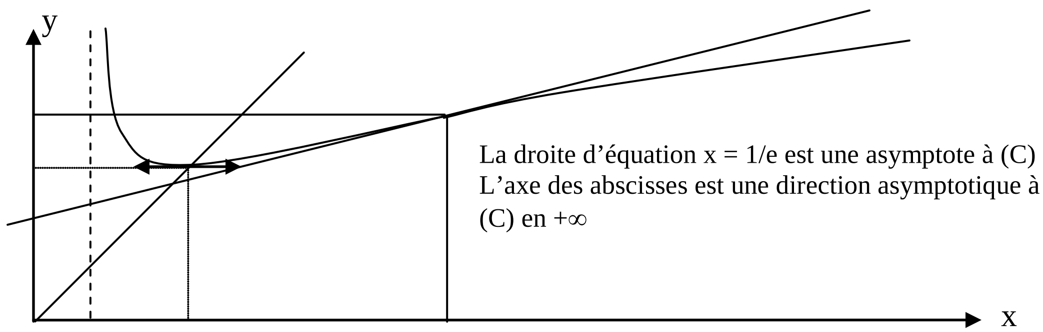
3.d ½



3.e	$2x - 2yy' - 3 - y' = 0$; $y' = \frac{2x - 3}{1 + 2y}$; $y'_E = \frac{1}{3}$. (T) : $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 2)$ ou $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ (N) : $y = -3x + 7$.	1

QVI	Eléments de réponses	
A.1	$\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \ln x} = 0$	1 ½
A.2	$f'(x) = \frac{\ln x + 1 - 1}{(1 + \ln x)^2} = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$.	1 ½

x	1/e		1		$+\infty$
f’(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

A.3.a	f ''(x)= $\dfrac{-\ln x+1}{x(1+\ln x)^3}$. $f''(x)$ s'annule pour x = e en changeant de signe , donc (C) admet un point d'inflexion W(e ; $\dfrac{e}{2}$).	1
A.3.b	$y-\dfrac{e}{2}=f'(e)(x-e)$; $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{e}{4}$.	1
A.4	$f(x)-x=\dfrac{x}{1+\ln x}-x=\dfrac{-x\ln x}{1+\ln x}$. • (C) rencontre (D) au point (1 ; 1) • (C) est au-dessus de (D) pour $\dfrac{1}{e}<x<1$; (C) est au-dessous de (D) pour $x>1$.	1
A.5		2
B.1.a	f est strictement croissante sur I ; f(I) = [f(1) ; f(e)] = [1; $\dfrac{e}{2}$] donc $f(I)\subset I$.	1
B.1.b	$f'(x)-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{-(1-\ln x)^2}{4(1+\ln x)^2}$; $f'(x)-\dfrac{1}{4}\le 0$ donc $f'(x)\le\dfrac{1}{4}$. Or $f'(x)\ge 0$ sur [1 ; e] , d'où $0\le f'(x)\le\dfrac{1}{4}$.	1
B.1.c	D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $\lvert f(x)-f(1)\rvert\le k\lvert x-1\rvert$ où k est le maximum de $\lvert f'(x)\rvert$ sur [1 ; e], d'où $\lvert f(x)-1\rvert\le\dfrac{1}{4}\lvert x-1\rvert$.	1
B.2.a	$U_0=2$ donc $U_0\in[1;e]$; pour n > 0 si $U_n\in[1;e]$ alors $f(U_n)\in[1;e]$ c .à .d $U_{n+1}\in[1;e]$.	1
B.2.b	$\lvert f(U_n)-1\rvert\le\dfrac{1}{4}\lvert U_n-1\rvert$; $\lvert U_{n+1}-1\rvert\le\dfrac{1}{4}\lvert U_n-1\rvert$.	½
B.2.c	Par récurrence : $\lvert U_o-1\rvert=1\le\dfrac{1}{4^0}$ On suppose que $\lvert U_n-1\rvert\le\dfrac{1}{4^n}$ et on prouve que $\lvert U_{n+1}-1\rvert\le\dfrac{1}{4^{n+1}}$. $\lvert U_{n+1}-1\rvert\le\dfrac{1}{4}\lvert U_n-1\rvert\le\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4^n}$, donc $\lvert U_{n+1}-1\rvert\le\dfrac{1}{4^{n+1}}$ $\lvert U_n-1\rvert\le\dfrac{1}{4^n}$ avec $\lim\dfrac{1}{4^n}=0$, donc $\lim U_n=1$.	1 ½