

الاسم :
الرقم :مسابقة في الرياضيات
المدة : ٤ ساعات

عدد المسائل : ست

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I- (2,5points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne :

▪ les points A (1 ; -2 ; 1) , B (2 ; -1 ; 3) , C(1 ; 1 ; 4) et H(0 ; 0 ; 2) .

▪ la droite (d) définie par :
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad (t \text{ est un paramètre réel}).$$

- 1) Ecrire une équation du plan (P) déterminé par les points A , B et C.
- 2) a- Démontrer que la droite (d) est perpendiculaire au plan (P) en H.
b- Démontrer que H est équidistant de A , B et C.
c- Ecrire un système d'équations paramétriques d'une bissectrice de l'angle AHB.
- 3) Soit M un point variable de (d) et E(2 ; 2 ; 0) un point fixe de (d).
Pour quelles valeurs de t le volume du tétraèdre MABC est-il égal au double de celui du tétraèdre EABC ?

II- (2points)

Soit (U_n) la suite définie sur IN par :

$$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \quad \text{et} \quad \text{pour } n \geq 1, \quad U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx .$$

1) Calculer U_0 et U_1 .

2) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$ et en déduire la valeur de U_2 .

3) a- Montrer que , pour $0 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$

et en déduire que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

III– (2points)

Durant le mois des soldes, la direction d'un supermarché organise, pour ses clients, chaque lundi une loterie.

Pour cela cette direction utilise deux urnes **U** et **V**.

L'urne **U** contient **4** boules rouges et **3** boules blanches.

L'urne **V** contient **10** bons d'achat de quatre catégories et dont les valeurs sont indiquées dans le tableau suivant:

	Première catégorie	Deuxième catégorie	Troisième catégorie	Quatrième catégorie
Nombre de bons d'achat.	2	3	4	1
Valeur du bon d'achat en LL	100 000	50 000	10 000	0

Un client tire au hasard une boule de l'urne **U** :

si la boule tirée est blanche , il ne gagne rien ;

si la boule tirée est rouge , il tire au hasard un bon d'achat de l'urne **V** .

1) Soit les événements suivants :

E : « le client qui participe à cette loterie réalise un gain de 10 000 LL ».

N : « le client qui participe à cette loterie ne gagne rien ».

G : « le client qui participe à cette loterie réalise un gain non nul ».

a- Vérifier que la probabilité de E est égale à $\frac{8}{35}$.

b- Calculer la probabilité de chacun des événements N et G.

2) On désigne par X la variable aléatoire égale au gain (positif ou nul) d'un client qui participe à cette loterie .

a- Déterminer la loi de probabilité de X.

b- Calculer l'espérance mathématique E(X).

IV – (3points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points $F(3 ; 0)$,

$F'(-3 ; 0)$ et $L(3 ; \frac{16}{5})$. On désigne par (E) l'ellipse de foyers F et F' et passant par L.

1) a- Calculer $LF + LF'$.

b- Déterminer les coordonnées des sommets de (E).

c- Déduire que $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ est une équation de (E) et tracer (E).

2) Soit (d) la droite d'équation $x = \frac{25}{3}$.

a- Que représente la droite (d) pour l'ellipse (E) ?

b- Ecrire une équation de la tangente (T) à (E) au point L.

c- Démontrer que les droites (d) et (T) se coupent en un point I sur l'axe des abscisses.

3) Calculer l'aire du domaine limité par l'ellipse (E) , la tangente (T) , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées .

V- (3,5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A le point d'affixe 2 et B le point d'affixe $2i$.

On désigne par E l'image de A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par F

l'image de B par la transformation T définie par sa forme complexe $z' = \left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

- 1) a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.
b- Démontrer que les points A, B, E et F sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
- 2) a - Prouver que $\frac{z_E - z_A}{z_F - z_B}$ est un réel.
b- vérifier que $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_B} = -i$.
c- Déduire que AEBF est un trapèze isocèle et que $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AF}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$.
- 3) Soit h l'homothétie qui transforme A en F et E en B et soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en F.
a- Déterminer le centre W de h.
b- Démontrer que $h \circ r = r \circ h$.
c- Soit S = h o r.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

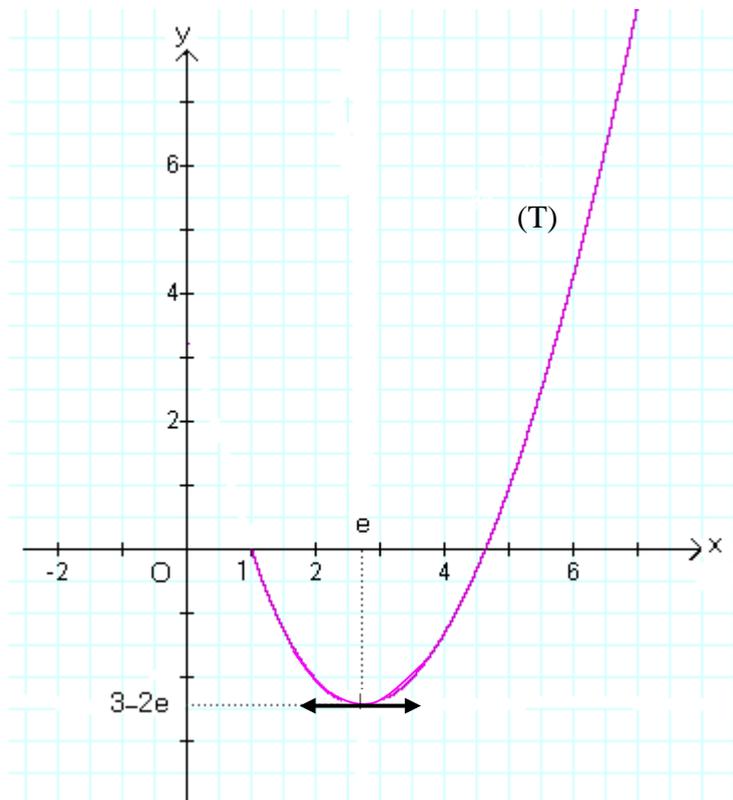
VI- (7 points)

Soit f la fonction définie, sur $]0 ; +\infty[$, par : $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et en déduire une asymptote à (C).
- 2) Déterminer les abscisses des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
- 3) a- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
b- Vérifier que $f''(x) = \frac{-2\ln x}{x^2}$; montrer que (C) admet un point d'inflexion I et écrire une équation de la tangente (d) à (C) en I.

- 4) Tracer la droite (d) et la courbe (C).
- 5) a-Démontrer que la fonction f admet sur $[1 ; + \infty[$ une fonction réciproque g et déterminer le domaine de définition de g.
 b-Vérifier que $A(5 ; e^2)$ est un point de la courbe représentative (G) de g et écrire une équation de la tangente à (G) en A.
- 6) Déterminer graphiquement , suivant les valeurs du réel m, le nombre des racines de l'équation $(\ln x)^2 + 2\ln x = m$.
- 7) La courbe (T) ci-dessous est la courbe représentative , sur $[1 ; + \infty[$, d'une primitive F de la fonction f .



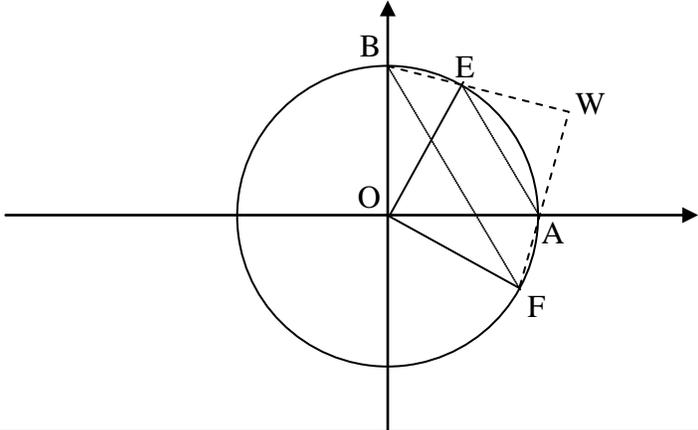
Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

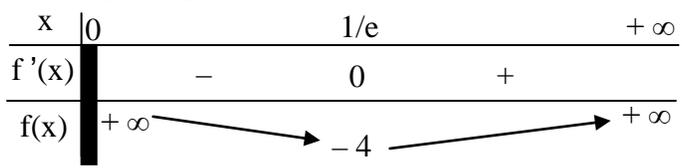
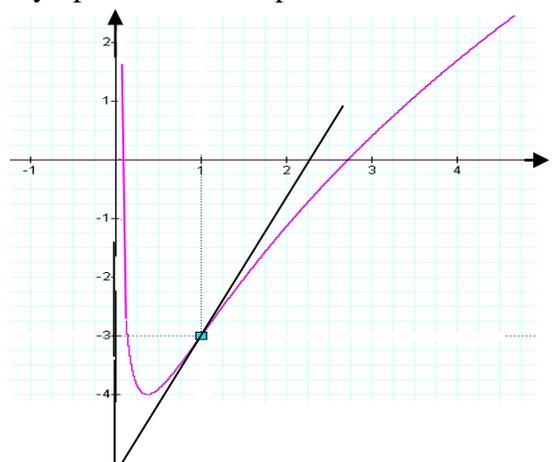
GS		MATH	1 st session 2005
Q ₁	Short Answers		M
1	The equation of plane (P) is determined by : $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad x + y - z + 2 = 0$		1
2a	$\vec{V}_d (1,1,-1)$ and $\vec{N}_p (1,1,-1)$, $\vec{V}_d = \vec{N}_p$, then (d) is perpendicular to (P). Intersection of (d) and (P) : $t + t + t - 2 + 2 = 0$; $t = 0$ (d) cuts (P) at point H(0 ; 0 ; 2).		1
2b	$\vec{HA} (1 ; -2 ; -1)$; $\vec{HB} (2 ; -1 ; 1)$; $\vec{HC} (1 ; 1 ; 2)$; $HA = HB = HC = \sqrt{6}$.		1/2
2c	HAB is isosceles of vertex H , $\vec{HA} + \vec{HB} : (3 ; -3 ; 0)$; $\vec{u} (1 ; -1 ; 0)$ is a direction vector of a bisector (Δ) of the angle $A \hat{H} B$. (Δ) : $x = m$; $y = -m$, $z = 2$. ► OR : W(3/2 ; -3/2 ; 2) is the midpoint of [AB] ; $\vec{HW} (3/2 ; -3/2 ; 0)$ is direction vector of (Δ) ; $\vec{u} (1 ; -1 ; 0) = 2/3 \vec{HW}$ also is direction vector of a bisector (Δ)		1
3	$V(MABC) = \frac{1}{3} MH \times \text{area}(ABC)$; $V(EABC) = \frac{1}{3} EH \times \text{area}(ABC)$ $V(MABC) = 2V(EABC)$; $MH = 2 EH$; $MH^2 = 4EH^2$ so $3t^2 = 48$; $t^2 = 16$ Thus $t = -4$ or $t = 4$.		1 1/2

Q ₂	Short Answers	M
1	$U_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1) \Big _0^1 = \ln 2$ $U_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = [x - \ln(x+1)]_0^1 = 1 - \ln 2$	1
2	$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{x+1} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ For $n = 1$; $U_2 + U_1 = \frac{1}{2}$; $U_2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.	1
3a	$0 \leq x \leq 1 ; 1 \leq x+1 \leq 2 ; \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 ; 0 \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 ; 0 \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$ $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^n dx ; 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$	1 1/2
3b	Since $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, then $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.	1/2

Q ₃	Short Answers	M										
1a	$P(E) = \frac{4}{7} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{35}$	$\frac{1}{2}$										
1b	$P(N) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{10} = \frac{17}{35}$; $P(G) = 1 - P(N) = \frac{18}{35}$	$1\frac{1}{2}$										
2a	<table border="1"> <tr> <td>x_i</td> <td>0</td> <td>10 000</td> <td>50 000</td> <td>100 000</td> </tr> <tr> <td>P_i</td> <td>$\frac{17}{35}$</td> <td>$\frac{8}{35}$</td> <td>$\frac{4}{7} \times \frac{3}{10} = \frac{6}{35}$</td> <td>$\frac{4}{7} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{35}$</td> </tr> </table>	x_i	0	10 000	50 000	100 000	P_i	$\frac{17}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{10} = \frac{6}{35}$	$\frac{4}{7} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{35}$	$1\frac{1}{2}$
x_i	0	10 000	50 000	100 000								
P_i	$\frac{17}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{10} = \frac{6}{35}$	$\frac{4}{7} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{35}$								
2b	$E(X) = \frac{10000}{35} (8 + 30 + 40) = \frac{156000}{7} \approx 22\,285.7$	$\frac{1}{2}$										

Q ₄	Short Answers	M
1a	$\vec{LF}(0; \frac{-16}{5})$; $\vec{LF}'(-6; \frac{-16}{5})$, then $LF + LF' = \frac{16}{5} + \sqrt{36 + \frac{256}{25}} = \frac{50}{5} = 10$.	$\frac{1}{2}$
1b	<p>$LF + LF' = 2a$ then $a = 5$, $x'Ox$ is the focal axis of (E) and O is its center, Thus the vertices on the focal axis are : A(5 ; 0) and A'(- 5 ; 0). $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$ then $b = 4$. The vertices on the non-focal axis are : B(0 ; 4) and B'(0 ; - 4).</p>	1
1c	<p>The ellipse (E) has as an equation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Thus we get $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.</p>	$1\frac{1}{2}$
2a	$x = \frac{25}{3} = \frac{a^2}{c}$ then (d) is a directrix of (E).	$\frac{1}{2}$
2b	(T) : $\frac{x_L x}{25} + \frac{y_L y}{16} = 1$; $\frac{3x}{25} + \frac{y}{5} = 1$ thus $3x + 5y - 25 = 0$.	$\frac{1}{2}$
2c	(T) cuts (d) at point $(\frac{25}{3} ; 0)$ which is a point on the axis of abscissas	$\frac{1}{2}$
3	Required area= $A = \text{area(OIJ)} - \frac{1}{4} (\pi ab) = \frac{OI \times OJ}{2} - \frac{20\pi}{4} = (\frac{125}{6} - 5\pi)u^2$	$1\frac{1}{2}$

Q 5	Short Answers	M
1a	$Z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z = e^{i\frac{-2\pi}{3}}Z$; T : rotation of center O and angle $\frac{-2\pi}{3}$.	1
1b	<p>E = R(A) ; OE = OA = 2 and F = T(B) ; OF = OB = 2 A , B , E and F belong to the circle of center O and radius 2.</p> 	1
2a	$Z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}Z_A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $Z_F = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z_B = \sqrt{3} - i$ $\frac{Z_E - Z_A}{Z_F - Z_B} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3i} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}(-1 + i\sqrt{3})} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ which is real.	1
2b	$\frac{Z_F - Z_A}{Z_E - Z_B} = \frac{-i + \sqrt{3} - 2}{1 + i\sqrt{3} - 2i} = \frac{-i(1 + i\sqrt{3} - 2i)}{1 + i\sqrt{3} - 2i} = -i$.	1/2
2c	<p>$\frac{Z_E - Z_A}{Z_F - Z_B}$ is real, then the vectors \vec{AE} and \vec{BF} have the same direction . On the other hand: $\left \frac{Z_F - Z_A}{Z_E - Z_B}\right = -i = 1$; EA = FB , and AEBF is an isosceles trapezoid. $\frac{Z_F - Z_A}{Z_E - Z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ then $(\vec{BE}; \vec{AF}) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$</p>	1
3a	h (A) = F and h(E) = B, then W is the point of intersection of (AF) and (BE)	1/2
3b	hor and roh are two similitudes having the same ratio and the same angle. We still have to prove that they have the same center. The triangle WBF is right isosceles at W, hence W is the center of r, Consequently hor and roh both have the same center W.	1
3c	S is a similitude of center W, of ratio $\sqrt{3}$ and of angle $\frac{\pi}{2}$.	1

Q 6	Short Answers	M
1a	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + \infty - 3 = +\infty$	1/2
1b	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \left(\ln x + 2 - \frac{3}{\ln x} \right) = -\infty (-\infty + 2 - 0) = +\infty.$ <p>The axis of ordinates is an asymptote to (C).</p>	1
2	$(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 = 0$; $\ln x = 1$ or $\ln x = -3$; $x = e$ or $x = e^{-3}$.	1
3a	$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} (\ln x + 1)$; $f'(x) = 0$ for $\ln x = -1$ thus $x = \frac{1}{e}$. 	1 1/2
3b	$f''(x) = 2 \left[-\frac{1}{x^2} (\ln x + 1) + \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x} \right) \right] = \frac{-2 \ln x}{x^2}$; $f''(x)$ vanishes for $x = 1$ and changes signs, thus (C) has a point of inflection, namely $I(1 ; -3)$. Eq. of (d) : $y + 3 = f'(1)(x-1)$; $y = 2(x-1) - 3$; $y = 2x - 5$.	1 1/2
4	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x} \right) = 0$, so (C) has , at $+\infty$, an asymptotic direction parallel to the x-axis.. 	2
5a	f is continuous and strictly increasing on $[1 ; +\infty[$ hence it has an inverse function g on $D_g = f([1 ; +\infty[) = [-3 ; +\infty[$.	1
5b	<ul style="list-style-type: none"> $f(e^2) = 4 + 4 - 3 = 5$ then $g(5) = e^2$ and $A(5; e^2)$ is a point on (G). An equation of the tangent to (G) at the point A is : $y - e^2 = g'(5)(x - 5)$ $g'(5) = \frac{1}{f'(e^2)} = \frac{e^2}{6}$; $y - e^2 = \frac{e^2}{6}(x - 5)$; $y = \frac{e^2}{6}x + \frac{e^2}{6}$.	2
6	$(\ln x)^2 + 2 \ln x = m$ is equivalent to $(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 = m - 3$, ie $f(x) = m - 3$ <ul style="list-style-type: none"> If $m - 3 < -4$ ie $m < -1$ then no roots If $m - 3 = -4$ ie $m = -1$ then there is one root If $m - 3 > -4$ ie $m > -1$ then there are two roots. 	2
7	$A = - \int_1^e f(x) dx = - [F(e) - F(1)] = - (3 - 2e - 0) = (2e - 3) u^2.$	1 1/2

