وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات

امتحانات شهادة الثانوية العامة
فرع الاجتماع والاقتصاد

دورة سنة 2005 العادية

عددالمسائل : اربع	مسابقة في : الرياضيات المدة : ساعتان	الاسم : الرقم :

ملاحظة : يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I-(4 points)

Le tableau suivant donne le montant des frais de publicité *x*, en millions LL, d'une usine de voitures et le nombre *y*, en dizaines de voitures vendues.

x_i	10	12	14	14,5	15
y_i	20	25	30	35	40

1) Calculer les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ des variables *x* et *y*.
2) Représenter graphiquement le nuage des points $(x_i\,;y_i)$ ainsi que le point moyen G ($\overline{X}\,;\overline{Y}$) dans un repère orthogonal.
3) Calculer le coefficient de corrélation r et donner une interprétation à la valeur ainsi trouvée.
4) Déterminer une équation de la droite de régression $D_{y/x}$ de *y* en *x* et tracer cette droite dans le repère précédent.
5) On suppose que le modèle précédent reste valable lorsque cette usine dépense 18 000 000 LL en frais de publicité.
   a- Estimer dans ce cas le nombre p de voitures vendues (la réponse sera donnée à l'unité près).
   b- Le coût moyen de fabrication d'une voiture est de 15 000 000 LL. Chaque voiture est vendue à 20 000 000 LL.
   Estimer le bénéfice de l'usine lorsqu'elle vend les p voitures.

II – (4 points)

Une urne contient 9 boules : 3 blanches, 4 rouges et 2 noires.

A- On tire **successivement**, au hasard et **sans remise**, trois boules de l'urne.
1) Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient blanches ?
2) Quelle est la probabilité que la troisième boule tirée soit la seule blanche parmi les trois boules tirées ?

B- Dans cette partie on tire **simultanément** au hasard trois boules de l'urne.
1) Soit C l'événement : « ***les trois boules tirées sont toutes de la même couleur*** ».
   Montrer que la probabilité de C est égale à $\frac{5}{84}$.
2) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées.
   a- Déterminer la loi de probabilité de X.
   b- Calculer l'espérance mathématique E(X).

III -(4 points)

Une étude statistique concernant le nombre des habitants d'un village montre que :

- Le nombre d'habitants était 6 000 au début de l'an 2 000.
- La croissance annuelle du nombre d'habitants est de 2 %.
- La diminution annuelle du nombre d'habitants est de 200 (installation dans les villes, émigration, …) .

On désigne par U_n le nombre des habitants de ce village en l'an (2000 + n).

1) On prend $U_0 = 6\,000$. Vérifier que $U_1 = 5920$.

2) Démontrer que $U_{n+1} = 1{,}02U_n - 200$.

3) Soit la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 10\,000$; $(n \geq 0)$.

a- Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 1,02.

b- Calculer V_n en fonction de n et en déduire U_n en fonction de n.

c- En quelle année le nombre des habitants de ce village devient-il pour la première fois inférieur à 3 000 ?

IV-(8 points)

A– Soit f la fonction définie , sur $[0\,;+\infty[$, par $f(x) = 3(x+1)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déterminer une asymptote à (C).

2) Montrer que $f'(x) = -3xe^{-x}$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Tracer la courbe (C).

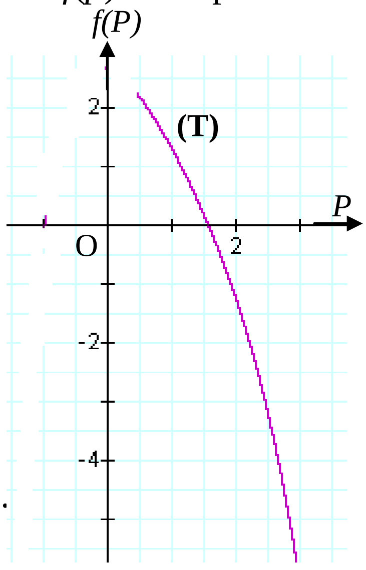
4) Soit F la fonction définie , sur $[0\,;+\infty[$, par $F(x) = 3(-x-2)e^{-x}$.

a- Montrer que F est une primitive de f.

b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

B– Une usine fabrique un produit chimique liquide. La demande est modélisée par :

$f(p) = 3(p+1)e^{-p}$; p est le prix unitaire exprimé en milliers LL et $f(p)$ est exprimée en milliers de litres pour $0{,}5 \leq p \leq 4$.



1) Calculer la demande pour un prix unitaire de 1 000 LL.

2) L'offre est modélisée par $g(p) = \dfrac{e^{p}}{3}$.

La courbe (T) ci-contre est la courbe représentative de la fonction h définie par $h(p) = f(p) - g(p)$ sur $[0{,}5\,;\ 4]$.

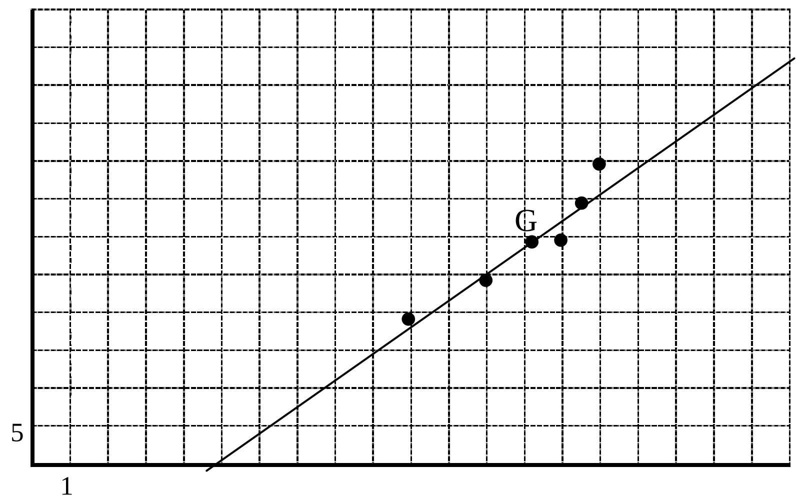
a- Vérifier que l'équation $h(p) = 0$ admet une racine unique α et prouver que $1{,}57 < \alpha < 1{,}58$.

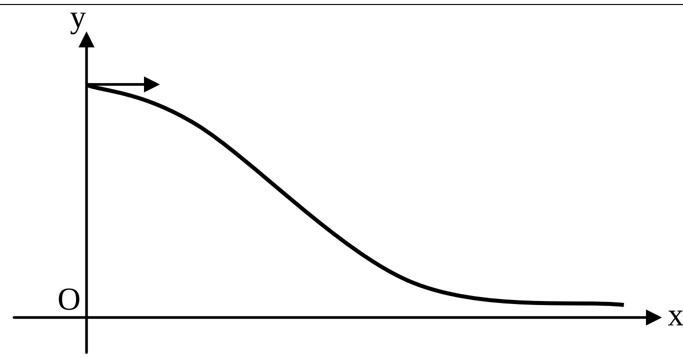
b-On suppose que $\alpha = 1{,}575$.

Donner une interprétation économique de cette valeur de α .

3)a- Calculer l'élasticité e(p) de la demande par rapport au prix p .

b- Déterminer l'ensemble des valeurs de p pour lesquelles la demande est élastique et trouver les prix correspondants.

<table>
<tr><td colspan="2">ES
2005</td><td>MATH</td><td>1ère session</td></tr>
<tr><th colspan="2">Q</th><th>Eléments de réponses</th><th>N</th></tr>
<tr><td rowspan="7">I</td><td>1</td><td>$\overline{X}$ = 13,1 ; $\overline{Y}$ = 30</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>r = 0 , 953
Il y a une forte corrélation positive.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$D_{Y/X}$: y = 3,633x – 17,60</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>5a</td><td>x = 18 ; y = 3,633 × 18 – 17,60 = 47,794 , soit 478 voitures.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5b</td><td>Bénéfice : (20 000 000 – 15 000 0000) × 478 – 18 000 000 = 2 372 000 000 LL.</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="5">II</td><td>A1</td><td>P(BBB) = $\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{84}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>La 1ère boule tirée n'est pas blanche ainsi que la 2ème ; p($\overline{B};\overline{B};B)=\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{5}{28}$.</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>On peut tirer 3 boules blanches ou 3 boules noires ; P(C) = $\frac{C_3^3+C_4^3}{C_9^3}$ = $\frac{5}{84}$</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>B2
a</td><td>X(Ω) = { 0 , 1 , 2}
<table>
<tr><th>x_i</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td>P_i</td><td>$\frac{C_7^3}{C_9^3}=\frac{5}{12}$</td><td>$\frac{C_2^1\times C_7^3}{C_9^3}=\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{C_2^2\times C_7^1}{C_9^3}=\frac{1}{12}$</td></tr>
</table></td><td>2 ½</td></tr>
<tr><td>B2
b</td><td>E(X) = 0 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{2}{12}$ = $\frac{4}{6}$ = $\frac{2}{3}$ = 0,666 .</td><td>½</td></tr>
<tr><td rowspan="6">III</td><td>1</td><td>U_1 = 6 000 + 6000 × 0,02 – 200 = 5920</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>U_{n+1} = U_n + 0,02×U_n – 200 = 1,02 × U_n – 200</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3a</td><td>$\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{U_{n+1}-10000}{U_n-10000}=\frac{1{,}02U_n-200-10000}{U_n-10000}=\frac{1{,}02U_n-10200}{U_n-10000}=\frac{1{,}02(U_n-10000)}{U_n-10000}$ = 1,02</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>$V_n = V_o(1{,}02)^n$; $V_o = U_o$ – 10 000 = – 4 000 ; V_n = – 4000$(1.02)^n$
$U_n = V_n$ + 10 000 = – 4000$(1{,}02)^n$ + 10 000</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>3c</td><td>– 4000$(1{,}02)^n$ + 10 000 < 3000 ; $(1{,}02)^n$ > $\frac{7}{4}$; n ln(1,02) > ln$\frac{7}{4}$; n > 28,25 ; n ≥ 29
En 2029 le nombre des habitants devient pour la première fois inférieur à 3 000.</td><td>2</td></tr>
</table>

IV	**A1**	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3(x+1)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x}$ **= 0 ; l'axe des abscisses est une asymptote à (C).**	**1**
	A2	**f '(x) = 3[e^{-x} –(x + 1)e^{-x}] = 3 e^{-x}(1– x – 1) = – 3x e^{-x}.** $\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & 0 & - & \\ \hline f(x) & 3 & \searrow & 0 \end{array}$	**2**
	A3		**2**
	A4 a	**F'(x) = 3[e^{-x} – (– x – 2) e^{-x}] = 3 e^{-x} (– 1 +x + 2) = 3(x + 1) e^{-x} = f(x)**	**1**
	A4 b	**A =** $\int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1$ **= F(1) – F(0) = 3(2 –** $\frac{3}{e}$**) u^2 .**	**1 ½**
	B1	**Pour un prix de 1000LL ; p = 1 ; f(1) =** $\frac{6}{e}$ **= 2,207 soit 2207 litres.**	**1**
	B2 a	**La courbe de la fonction h coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse α.** **L'équation h(p) = 0 admet une solution unique p = α ,** **h(1, 57) = 0,0018 > 0 et h(1, 58) = – 0,024 < 0** **Donc 1, 52 < α < 1, 58.**	**1 ½**
	B2 b	**Pour un prix unitaire égal à 1575 LL le marché est en équilibre.**	**1**
	B3 a	**e(p) =** $\frac{pf'(p)}{f(p)} = \frac{-p^2}{p+1}$	**1 ½**
	B3 b	**La demande est élastique ssi e(p) < – 1 ;** $\frac{-p^2}{p+1}$ **< – 1 ; p^2 – p – 1 > 0** **p <** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **ou p >** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(avec 0,5** $\le p \le 4$**)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **< p ≤ 4 ou 1,618 < p ≤ 4** **Le prix unitaire appartient à l'intervalle] 1618 ; 4000].**	**1 ½**