عدد المسائل: اربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I-(4 points)

Le bénéfice annuel, depuis l'an 2001, d'un bureau de services (en millions de LL) est donné par le tableau suivant :

Année	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5
Bénéfice en millions de LL : y_i	200	220	250	270	280

1) a- Déterminer les coordonnées du point moyen G.
   b- Construire le nuage de points associé à la série statistique ($x_i ; y_i$) et placer le point G dans un repère orthogonal.
2) Ecrire une équation de la droite de régression $D_{y/x}$ de y en x et tracer cette droite dans le repère précédent.
3) On suppose que ce modèle reste valable jusqu'en 2015.
   a- Quel bénéfice ce bureau espère t-il réaliser en 2008 ?
   b- A partir de quelle année le bénéfice du bureau dépassera t-il, pour la première fois, 400 millions de LL ?

II- (4 points)

Dans un magasin il y a 1000 pochettes en cuir parmi lesquelles certaines sont défectueuses.
Ces pochettes sont fabriquées par trois usines α, β et γ selon le tableau suivant :

	Usine α	Usine β	Usine γ
Nombre de pochettes	200	350	450
Pourcentage de pochettes défectueuses	5%	4%	2%

On choisit au hasard une pochette de ces 1000 pochettes et on considère les événements suivants :

A : « La pochette choisie est fabriquée par l'usine α ».
B : « La pochette choisie est fabriquée par l'usine β ».
C: « La pochette choisie est fabriquée par l'usine γ ».
D : « La pochette choisie est défectueuse ».

1) a- Prouver que la probabilité $P(D \cap A)$ est égale à $\frac{1}{100}$.
   b- Calculer les probabilités suivantes : $P(D \cap B)$, $P(D \cap C)$ et $P(D)$.
2) Sachant que la pochette choisie n'est pas défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle soit fabriquée par l'usine α ?
3) La pochette est vendue à 50 000LL si elle est produite par l'usine α, à 60 000LL si elle est produite par l'usine β et à 80 000LL si elle est produite par l'usine γ.
   Une réduction de 30 % est faite sur le prix de chaque pochette défectueuse.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au prix final d'une pochette choisie au hasard.
   Trouver les six valeurs de X et déterminer la loi de probabilité de X.

III- (4 points)

Fadi dépose à la banque une somme de 100 millions LL à un taux d'intérêt annuel de 10 % avec capitalisation annuelle. A la fin de chaque année, Fadi retire de son compte une somme de 5 millions de LL.

On note $U_0 = 100$ et U_n la somme en millions de LL dont dispose Fadi à la fin de la nième année après le retrait de 5 millions de LL.

1) a- Vérifier que $U_1 = 105$ et calculer U_2.

b- Montrer que la suite (U_n) n'est pas géométrique.

c- Justifier la relation $U_{n+1} = 1{,}1U_n - 5$.

2) On pose pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - 50$.

a- Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 1,1.

b- Calculer V_n en fonction de n et trouver la valeur de U_8.

IV-**(8 points)**

A- Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x)=(x^2+2x)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Vérifier que l'axe des abscisses est une asymptote à (C).

b- Calculer $f\left(\sqrt{2}\right)$ et donner la réponse à 10^{-3} près.

2) a- Montrer que $f'(x)=(2-x^2)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations de f.

b- Ecrire une équation de la tangente (d) en O à (C).

3) Tracer la droite (d) et la courbe (C).

4) Soit F la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $F(x) = (-x^2 - 4x - 4)e^{-x}$.

a- Montrer que F est une primitive de f.

b Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

B- Une usine fabrique un détergent liquide. La demande en milliers de litres est donnée par :

$d(p) = (p+2)e^{-p}$ où p est le prix unitaire (prix d'un litre) en milliers LL. $(1 \le p \le 4)$

1) Calculer la demande pour un prix unitaire de 2 000 LL.

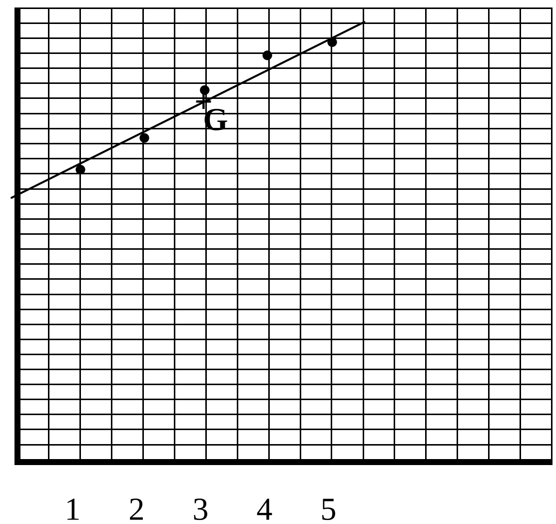
2) Démontrer que la fonction de revenu est donnée par $f(p)=(p^2+2p)e^{-p}$.

3) Pour quel prix unitaire le revenu est – il maximum ? Déterminer ce maximum.

4) a- Déterminer l'élasticité e(p) de la demande par rapport au prix.

b- Calculer $e\left(\sqrt{2}\right)$ et donner à la valeur ainsi trouvée, une interprétation économique.

ES MATHEMATIQUES

BAREME		**2ème SESSION 2006**
Q I	ELEMENTS DES REPONSES	N
1.a	$\overline{X} = 3$; $\overline{Y} = 244$	1
1.b		1 ½
2	En utilisant la calculatrice ; y = 21x + 181	1 ½
3.a	En 2008 , x = 8 , y = 21 × 8 + 181 = 349 Le bénéfice réalisé en 2008 est estimé à 349 000 000 LL	1 ½
3.b	y > 400 ; 21x + 181 > 400 ; 21x > 219 ; x > 10,42. En 2011 le bénéfice dépassera pour la première fois 400 millions de LL.	1 ½

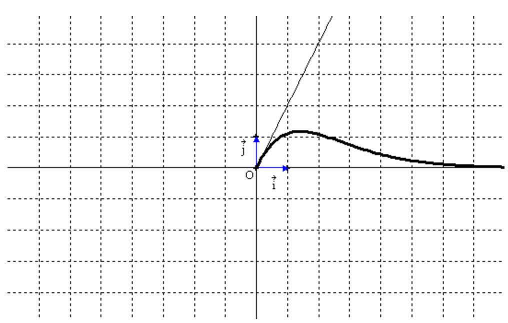
QII	ELEMENTS DES REPONSES	N

	Usine α	Usine β	Usine γ	Total
Nombre de pochettes défectueuses	10	14	9	33
Nombre de pochettes non défectueuses	190	336	441	967
Total	200	350	450	1 000

1.a	$P(D \cap A) = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$	1
1.b	$P(D \cap B) = \frac{14}{1000} = \frac{7}{500}$; $P(D \cap C) = \frac{9}{1000}$ $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = \frac{10+14+9}{1000} = \frac{33}{1000}$ ▶ OU : $P(D) = \frac{33}{1000}$ par lecture directe du tableau.	2
2	$P(A/\overline{D}) = \frac{190}{967}$	1
3	Les valeurs de X sont : 35 000 ; 42 000 ; 50 000 ; 56 000 ; 60 000 et 80 0000	3

x_i	35 000	42 000	50 000	56 000	60 000	80 000	Total
p_i	0,01	0,014	0, 19	0, 009	0, 336	0, 441	1

III	ELEMENTS DES REPONSES	N
1.a	$U_1 = U_0\,(1 + 0.1) - 5 = 100 \times 1{,}1 - 5 = 105.$ $U_2 = U_1 \times 1{,}1 - 5 = 105 \times 1{,}1 - 5 = 110{,}5.$	1
1.b	$\dfrac{U_1}{U_o} = \dfrac{105}{100} = 1{,}05$ et $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{110{,}5}{105} = 1{,}052$, donc $\dfrac{U_1}{U_o} \neq \dfrac{U_2}{U_1}$.(U_n) n'est pas géométrique	1 ½
1.c	$U_{n+1} = U_n + 0{,}1U_n - 5 = 1{,}1U_n - 5.$	1
2.a	$\dfrac{V_{n+1}}{Vn} = \dfrac{U_{n+1} - 50}{U_n - 50} = \dfrac{1{,}1U_n - 55}{U_n - 50} = \dfrac{1{,}1(U_n - 50)}{U_n - 50} = 1{,}1$ (V_n) est une suite géométrique de raison q = 1,1.	1 ½
2.b	$V_o = U_o - 50 = 50$; $V_n = V_o \times q^n = 50(1{,}1)^n$; $U_8 = V_8 + 50 = 50(1{,}1)^8 + 50 = 157{,}179.$	2

QIV	ELEMENTS DES REPONSES	N
A1a	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 2x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$.	1
A1b	$f(\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})\,e^{-\sqrt{2}} = 1{,}174$	1
A2a	$f'(x) = (2x + 2)\,e^{-x} - e^{-x}\,(x^2 + 2x) = e^{-x}\,(2 - x^2)$ x : 0 ; $\sqrt{2}$; $+\infty$ $f'(x)$: $+$; 0 ; $-$ $f'(x)$: $0 \nearrow 1{,}174 \searrow 0$	1 ½
A2b	(d) : y = f '(0) x = 2x	1
A3	 1 ½	
A4a	$F'(x) = (-2x - 4)\,e^{-x} - e^{-x}(-x^2 - 4x - 4)$ $= e^{-x}(x^2 + 2x) = f(x)$	1
A4b	$A = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0)$ $= -9e^{-1} + 4 = 0{,}689\ u^2$	1
B1	Pour un prix de 2000 LL ; p = 2 ; $d(2) = 4e^{-2} = 0{,}541$ soit 541 litres.	1
B2	Revenu = demande × prix, d'où $f(p) = p\,(p+2)\,e^{-p} = (p^2+2p)e^{-p}$.	1
B3	Le revenu est maximum pour $p = \sqrt{2}$ c'est-à-dire pour un prix de 1414 LL et ce maximum est 1174 milliers LL.	1 ½
B4a	$e(p) = p \times \dfrac{d'(p)}{d(p)} = p \times \dfrac{(-p-1)\,e^{-p}}{(p+2)\,e^{-p}} = \dfrac{-p(p+1)}{p+2}$	1
B4b	$e(\sqrt{2}) = \dfrac{-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+2} = -1$; lorsque le revenu est maximum, la demande a une élasticité unitaire.(Pour une augmentation de 1% sur le prix unitaire de 1414LL,la demande subit une diminution de 1%).	1 ½