وزارة التربية والتعليم العالي　　امتحانات الشهادة الثانوية العامة　　الدورة الإكمالية الإستثنائية للعام ٢٠٠٧
المديرية العامة للتربية　　الفرع : علوم الحياة
دائرة الامتحانات

عدد المسائل : اربع　　مسابقة في مادة الرياضيات　　الاسم:
المدة ساعتان　　الرقم:

ملاحظة : يسمح بإستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I – (4 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, M et M' d'affixes respectives i, z et z' tels que $z' = \dfrac{iz}{z-i}$ $(z \neq i)$.

1- Déterminer les points M tels que z' = z.

2- Dans le cas où $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$, trouver un argument de z'.

3- Soit z = x+iy et z' = x' + i y' où x, y, x' et y' sont des réels.

a) Calculer x' et y' en fonction de x et y.

b) Déterminer l'ensemble des points M dans le cas où z' est réel.

4- a) Montrer que $z' - i = \dfrac{-1}{z-i}$.

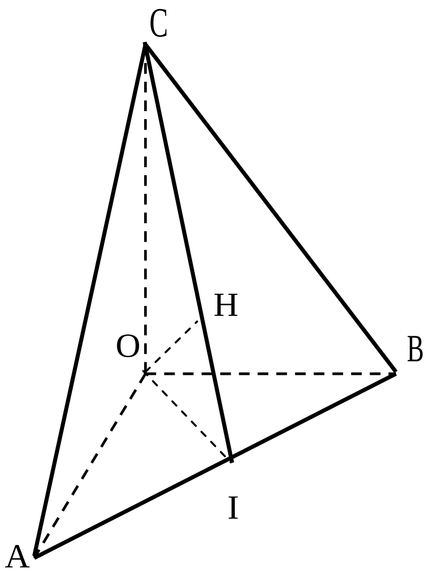
b) Démontrer que lorsque M se déplace sur le cercle (ω) de centre A et de rayon 1, alors M' se déplace sur le même cercle.

II – (4 points)

La figure ci-contre est considérée dans un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où :

$\overrightarrow{OA} = \vec{i}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OC} = 2\vec{k}$.

Soit I le milieu de [AB].



1- Justifier qu'une équation du plan (ABC) est : 2x + 2y + z – 2 = 0.

2- On considère le point $H\left(\dfrac{4}{9}; \dfrac{4}{9}; \dfrac{2}{9}\right)$.

a) Montrer que C, H et I sont alignés.

b) Démontrer que (OH) est perpendiculaire au plan (ABC).

c) Démontrer que les deux plans (OIC) et (ABC) sont perpendiculaires.

3- a) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par C et parallèle à (OB).

b) Soit F un point variable de (Δ).

Démontrer que le tétraèdre FOAB a un volume constant que l'on calculera.

III – (4 points)

Dans une bibliothèque publique, chaque visiteur doit choisir un livre ou bien utiliser un ordinateur.

70% des visiteurs utilisent l'ordinateur.

Parmi ceux qui utilisent l'ordinateur 45% font des recherches.

Parmi les visiteurs qui choisissent un livre 80% font des recherches.

A) On rencontre, au hasard, un visiteur de la bibliothèque.

On considère les événements suivants :

O: « le visiteur utilise l'ordinateur».

L: « le visiteur choisit un livre».

R: « le visiteur fait des recherches».

1-Vérifier que la probabilité $P(O \cap R)$ est égale à 0,315.

2-Calculer $P(L \cap R)$ puis $P(R)$.

3-Le visiteur a fait des recherches, calculer la probabilité qu'il ait utilisé l'ordinateur.

B) Un lundi matin, 30 personnes ont visité la bibliothèque. On choisit, simultanément et au hasard, trois de ces visiteurs. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de visiteurs qui ont utilisé l'ordinateur parmi les trois visiteurs choisis.

1- Déterminer les valeurs de X.

2- Déterminer la loi de probabilité de X.

IV – (8 points)

Soit f la fonction définie, sur $[0;+\infty[$, par $f(x) = (x+1)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (unité 2cm)

1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

2- a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

b) Calculer $f'(0)$ et interpréter le résultat graphiquement.

3- a) Prouver que la courbe (C) a un point d'inflexion $W(1, \frac{2}{e})$.

b) Ecrire une équation de la tangente (d) à (C) au point W.

4- Tracer (d) et (C).

5- a) Calculer les réels a et b pour que la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de f.

b) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

6- Soit g la fonction réciproque de f et (G) sa courbe représentative.

a) Tracer (G) dans le repère précédent.

b) Ecrire une équation de la tangente à (G) au point d'abscisse $\frac{2}{e}$.

معيار التصحيح مسابقة في مادة الرياضيات

I – (4 points)

Partie de la Q.	Corrigé	Note
1	$z=\frac{iz}{z-i}$ donc z(z-2i) = 0, z = 0 ou z = 2i par suite M(0;0) ou M(0;2).	0,5
2	$z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{-1}{2}+\frac{i}{2}; z'=\frac{\frac{-1}{2}-\frac{i}{2}}{\frac{-1}{2}-\frac{i}{2}}=1;\ \arg z'=0(2\pi)$.	0,5
3a	$z'=\frac{-x}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$. $x'=\frac{-x}{x^2+(y-1)^2}$; $y'=\frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$	0,5
3b	z' est réel donc $x^2+y^2-y=0$; par suite $x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ et $z\neq i$, l'ensemble des points M est le cercle de centre $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point A(0;1).	1
4a	$z'=\frac{iz}{z-i}$ alors $z'-i=\frac{iz}{z-i}$ -i donc $z'-i=\frac{-1}{z-i}$.	0,5
4b	Puisqu'on a AM = 1, $\lvert z-i\rvert=1$ alors $\lvert z'-i\rvert=\left\lvert\frac{-1}{z-i}\right\rvert=\frac{\lvert -1\rvert}{1}=1$; AM' = 1 et M'décrit le même cercle (ω).	1

II – (4 points)

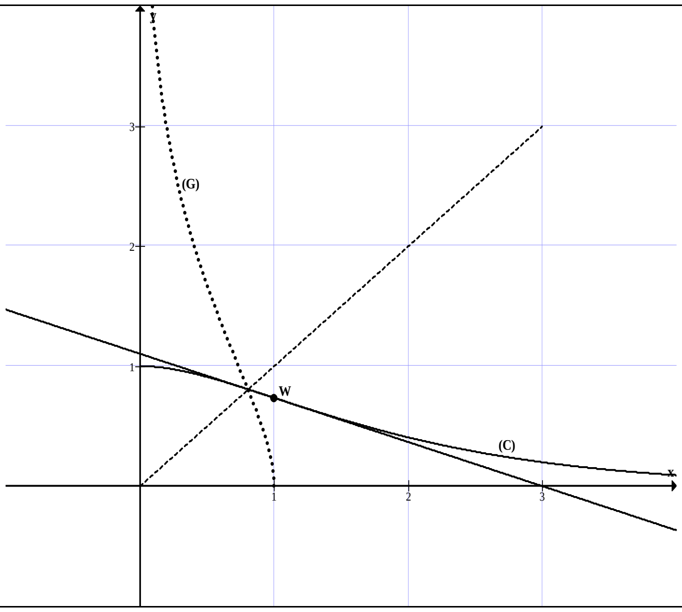
Partie de la Q.	Corrigé	Note
1	Les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation donnée car: $2x_A+2y_A+z_A-2=2+0+0-2=0$. De même, $2x_B+2y_B+z_B-2=0+2+0-2=0$; et $2x_C+2y_C+z_C-2=0$.	0,5
2a	$\overrightarrow{CH}\left(\frac{4}{9};\frac{4}{9};-\frac{16}{9}\right)$; $\overrightarrow{CI}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-2\right)$; donc, $\overrightarrow{CH}=\frac{8}{9}\overrightarrow{CI}$, par suite C , H et I sont alignés.	0,5
2b	$\vec{n}$ (2 ; 2; 1) est un vecteur normal au plan (ABC), mais $\overrightarrow{OH}\left(\frac{4}{9};\frac{4}{9};\frac{2}{9}\right)=\frac{2}{9}\vec{n}$, donc (OH) est perpendiculaire au plan (ABC)	0,5

2c	(OH) est perpendiculaire au plan (ABC) et (OH) $\subset$(OCI) donc le plan (OCI) est perpendiculaire au plan (ABC) ***OU :*** $\vec{n'} = \vec{OI} \wedge \vec{OC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j}$; $\vec{n'}$ est normal au plan (OIC) et $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$	1
3a	$\vec{OB}(0;1;0)$ est un vecteur directeur de (Δ), et C est un point de(Δ). Par conséquent, (Δ): $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$.	0,5
3b	(Δ) est parallèle au plan(OAB), donc la distance de F à (OAB) est constante par suite le volume du tétraèdre est constant. Aire du triangle OAB $= \frac{OA \times OB}{2} = 0,5u^2$ et d (F ;(OAB)) = OC = 2, par conséquent, $V = \frac{0,5 \times 2}{3} = \frac{1}{3}u^3$. ►OU : On calcule $\vec{OF} \cdot \left(\vec{OA} \wedge \vec{OB}\right) = 2$ (indépendant de t), et V= $\frac{\left\lvert \vec{OF} \cdot \left(\vec{OA} \wedge \vec{OB}\right) \right\rvert}{6} = \frac{1}{3}u^3$	1

III – (4 points)

Partie de la Q.	Corrigé	Note
A1	$P(O \cap R) = P(O).P(R/O) = (0,7)(0,45) = 0,315$	0,5
A2	$P(L \cap R) = P(L).P(R/L) = (0,3)(0,8) = 0,24$ $P(R) = P(O \cap R) + P(L \cap R) = 0,315 + 0,24 = 0,555$	1
A3	$P(O/R) = \frac{P(O \cap R)}{P(R)} = 0,567$	0,5
B1	Les valeurs de X sont : 0 ; 1 ; 2 et 3	0,5
B2	**Si le nombre total est 30, alors il y a 21 qui utilisent l'ordinateur.** $P(X=0) = \frac{C_9^3}{C_{30}^3} = \frac{3}{145}$, $P(X=1) = \frac{C_{21}^1 C_9^2}{C_{30}^3} = \frac{27}{145}$ $P(X=2) = \frac{C_{21}^2 C_9^1}{C_{30}^3} = \frac{27}{58}$, $P(X=3) = \frac{C_{21}^3}{C_{30}^3} = \frac{19}{58}$	1,5

IV – (8 points)

<table>
<tr><th>Partie de la Q.</th><th>Corrigé</th><th>Note</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$,
donc l'axe des abscisses est asymptote à (C) .</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>f '(x) = $-xe^{-x}$.
$$\begin{array}{c|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & 0 & - & \\ \hline f(x) & 1 & \searrow & 0 \end{array}$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>f '(0) = 0. La tangente à (C) en (0 ;1) est parallèle à l'axe des abscisses.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3a</td><td>$f''(x) = (x - 1)e^{-x}$; $f''(x)$ s'annule pour x = 1 en changeant de signe; par conséquent (C) a un point d' inflexion W(1, $\frac{2}{e}$).</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>$y-\frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x-1)$ ou $y = -\frac{1}{e}x+\frac{3}{e}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5a</td><td>F'(x) = f(x) ; a – b – ax = x + 1 donc a = –1, b = –2.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5b</td><td>$A = \int_0^1 f(x)dx = \left[(-x-2)\,e^{-x} \right]_0^1 = \left(2-\frac{3}{e}\right)u^2$ = 0,896 u^2 = 0,896× 4cm^2 = 3,584cm^2.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6a</td><td>Courbe représentative de g.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>6b</td><td>La droite symétrique de (d) par rapport à la première bissectrice a pour équation:
$x = -\frac{1}{e}y+\frac{3}{e}$ ou y = -ex + 3
OU : $g'\left(\frac{2}{e}\right) = \frac{1}{f'(1)} = -e$;
une équation de la tangente est $y-1 = -e(x-\frac{2}{e})$; y = – ex +3 .</td><td>0,5</td></tr>
</table>