عدد المسائل: اربع	مسابقة في مادة تايضايرلا المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I-(3,5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$,
on donne les points A, B et M d'affixes respectives 2, 4 et z (avec $z \neq 2$).
Soit M' le point d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-4}{z-2}$.

1) a- Donner une interprétation géométrique de $|z'|$, $|z-4|$ et $|z-2|$.
 b- Déterminer l'ensemble des points M lorsque M' décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

2) Soit $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$.
 a- Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
 b- Lorsque z' est réel, sur quelle ligne se déplace le point M ?

II- (4 points)

Une urne U contient **quatre** boules numérotées **1**, **trois** boules numérotées **2** et **une** boule numérotée **5**.
Une autre urne V contient **trois** boules numérotées **1** et **cinq** boules numérotées **2**.

A- On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne U.
 Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 E : « les deux boules tirées portent le même numéro »
 F : « le produit des deux numéros portés par les deux boules tirées est 10 ».

B- On tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V.
 Soit X la variable aléatoire égale à la somme des deux numéros portés par les deux boules tirées.

1) Donner les cinq valeurs possibles de X.
2) Vérifier que la probabilité d'avoir X = 3 est égale à $\dfrac{29}{64}$.
3) Déterminer la loi de probabilité de X.

III-**(4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$,on donne :

le plan (P) d'équation : $x + y + z - 4 = 0$,

les points A (3 ;1 ; 0) , B(1 ;2 ;1), C(1 ; 1 ;2) et E(2 ; 0 ;-1).

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2) a- Vérifier que (P) est le plan déterminé par A, B et C.

b- Montrer que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (P).

3) On désigne par (Q) le plan passant par A et perpendiculaire à (BE). Ecrire une équation de (Q).

4) Les plans (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

a- Démontrer que les droites (D) et (BC) sont parallèles.

b- Soit L un point quelconque de (BC) et H son projeté orthogonal sur (Q).

Montrer que LH reste constante lorsque L décrit la droite (BC).

IV-**(8,5 points)**

A- On donne l'équation différentielle (E) : $y' - y - e^{x} + 1 = 0$.

On pose $z = y - xe^{x} - 1$.

1) Trouver une équation différentielle (E') satisfaite par z et déterminer sa solution générale.

2) Déduire la solution générale de (E) et trouver une solution particulière y de (E) qui vérifie y(0) = 0.

B- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (x - 1)e^{x} + 1$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Donner f(2) sous forme décimale .

b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (d) à (C).

c- Vérifier que la courbe (C) coupe son asymptote (d) au point E(1 ; 1).

2) a- Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.

b- Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion.

3) Tracer la droite (d) et la courbe (C).

4) a- Démontrer que la fonction f admet sur [0 ; + ∞ [une fonction réciproque g.

b- Tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère $(O;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

c- Calculer l'aire du domaine limité par les deux courbes (C) et (G).

SV MATHEMATIQUES

BAREME		2ème SESSION 2006
Q1		N
1.a	$\lvert z'\rvert = OM'$; $\lvert z-4\rvert = BM$ et $\lvert z-2\rvert = AM$	1
1.b	$\lvert z'\rvert = \dfrac{\lvert z-4\rvert}{\lvert z-2\rvert}$ d'où $OM' = \dfrac{BM}{AM}$. OM' = 1 équivaut à BM = AM et l'ensemble des points M est la médiatrice de [AB],	1
2.a	$x' + iy' = \dfrac{x+iy-4}{x+iy-2} = \dfrac{(x-4+iy)(x-2-iy)}{(x-2)^2+y^2}$;$x' = \dfrac{x^2+y^2-6x+8}{(x-2)^2+y^2}$,$y' = \dfrac{2y}{(x-2)^2+y^2}$	1
2.b	z' est réel ssi y' = 0 d'où y = 0 et M se déplace sur l'axe des abscisses.	½

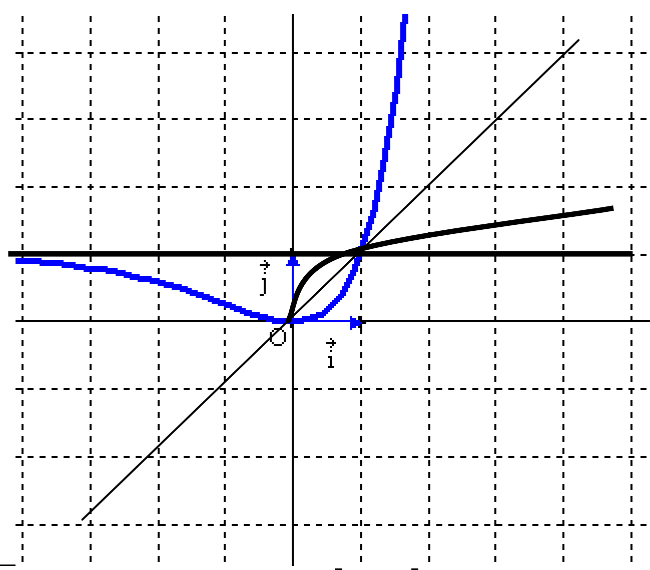
Q2		N
A	$P(E) = P(1\,;1) + P(2\,;2) = \dfrac{C_4^2}{C_8^2} + \dfrac{C_3^2}{C_8^2} = \dfrac{9}{28}$. $P(F) = P(2\,;5) = \dfrac{C_3^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \dfrac{3}{28}$	1½
B-1	Les cinq valeurs de X sont : 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 7 .	½
B-2	$P(X=3) = P(1\,;2) + P(2\,;1) = \dfrac{4}{8}\times\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{29}{64}$	½
B-3	(voir tableau ci-dessous)	1½

x_i	2	3	4	6	7
P_i	$\dfrac{4}{8}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{12}{64}$	$\dfrac{29}{64}$	$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{15}{64}$	$\dfrac{1}{8}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{64}$	$\dfrac{1}{8}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{64}$

Q3		N
1	$\vec{AB}(-2,1,1)$, $\vec{BC}(0,-1,1)$; $\vec{AB}.\vec{BC} = 0$ donc ABC est rectangle en B.	½
2.a	Les coordonnées de A , B et C vérifient l'équation de (P). $\Rightarrow$ ou : $\vec{AM}.(\vec{AB}\wedge\vec{AC}) = 0$	½
2.b	$\vec{AE}(-1,-1,-1)$, $\vec{N_P}(1,1,1)$ d'où $\vec{AE} = -\vec{N_P}$ et (AE) est perpendiculaire à (P).	½
3	. $\vec{BE}(1,-2,-2) = \vec{N_Q}$ donc (Q) : x – 2y – 2z + d = 0, A appartient à (Q) donne d = – 1 (Q) : x – 2y – 2z – 1 = 0.	½

4.a	$\vec{BC}(0,-1,1)$, $\vec{V_D} = \vec{N_P}\wedge\vec{N_Q} = 3\vec{j} - 3\vec{k}$ donc $\vec{V_D} = -3\vec{BC}$ et B n'appartient pas à (Q) d'où (D) // (BC) .
	$\Rightarrow$ OU : (BC) est perpendiculaire au plan (ABE) , donc (BC) est perpendiculaire à (EB), et (EB) est perpendiculaire à (Q) , donc (BC) // (Q) [car (BC) $\not\subset$ (Q)]
	(P) passe par (BC) donc (P) coupe (Q) suivant (D) //(BC).
		1

4.b	(D) //(BC) , donc(BC) //(Q) .Tous les points de (BC) sont à égale distance de (Q) ; $\Rightarrow$ OU : Equations de (BC) : x = 1 , y = – m + 2 , z = m + 1 $d(M \to (Q)) = \dfrac{\lvert 1+2m-4-2m-2-1\rvert}{\sqrt{1+4+4}} = 2$	1

<table>
<tr><th>Q4</th><th></th><th>N</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>$y' - y - e^x + 1 = 0$; $y = z + xe^x + 1$; $y' = z' + e^x + xe^x$; $z' + e^x + xe^x - z - xe^x - 1 - e^x + 1 = 0$
$z' - z = 0$; $z = Ce^x$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>$y = Ce^x + xe^x + 1$; $y(0) = C + 1 = 0$; $C = -1$, donc $y = -e^x + xe^x + 1$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B1.a</td><td>$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $f(2) = e^2 + 1 = 8,389$.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>B1.b</td><td>$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x - e^x + 1) = 1$, donc la droite (d) d'équation $y = 1$ est une asymptote à (C) .</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B1.c</td><td>$y = 1$ et $1 = (1 - 1)e^x + 1$; d'où (C) coupe (d) en E (1 ;1) .</td><td>½</td></tr>
<tr><td>B2.a</td><td>$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$.
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f '(x)</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>1</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>B2.b</td><td>$f''(x) = (x + 1)e^x$; $f''(x)$ s'annule pour $x = -1$ en changeant de signe ; donc (C) admet un point d'inflexion .</td><td>½</td></tr>
<tr><td>B3</td><td>
</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B4.a</td><td>f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ elle admet donc une fonction réciproque g .</td><td>½</td></tr>
<tr><td>B4.b</td><td>(G) est le symétrique de (C) par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>B4.c</td><td>$\mathcal{A} = 2\int_0^1 [x - f(x)]dx = 2\int_0^1 (x - 1 + e^x - xe^x)dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - x + e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx$
or $\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$
d'où $\mathcal{A} = 2\left(\frac{1}{2} - 1 + e - 1\right) - 2 = 2e - 5$ u^2.</td><td>1</td></tr>
</table>