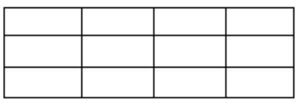
وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع: علوم عامة	دورة سنة ٢٠٠٨ الاكمالية الاستثنائية
عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة أربع ساعات	الاسم: الرقم:

إرشادات عامة :- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات

- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I- (2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N	Questions	Réponses		
		a	b	c
1	Soit $f(x)=\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ pour $x\in]-\infty;-1[$, on a :	$f(x)=\pi+2\arctan(x)$	$f(x)=-2\arctan(x)$	$f(x)=\pi-2\arctan(x)$
2	$f(x)=\ln(x)$ définie sur $]0;+\infty[$; la dérivée d'ordre n de f est donnée par :	$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^n}$	$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$	$f^{(n)}(x)=\frac{1}{x^n}$
3	Le nombre de rectangles dans cette figure est : 	60	12	20
4	L'équation $e^{2x}+2x-1=0$, admet dans l'ensemble *IR* :	2 racines distinctes	aucune racine	une seule racine
5	Si $z=e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{-i\frac{\pi}{6}}$ alors :	$\arg(z)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$	$\arg(z)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$	$\arg(z)=\frac{\pi}{6}$.

II- (2 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le point A(2 ; –3 ; 5) et les plans (P) et (Q) d'équations:

(P): $2x - 2y - z + 4 = 0$

(Q): $2x + y + 2z + 1 = 0$

A-1) Démontrer que les deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

2) Montrer que la droite (D) définie par $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 3 \\ z = -2t - 2 \end{cases}$ (t est un paramètre réel),

est l'intersection de (P) et (Q).

3) Calculer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur la droite (D).

B- On désigne par (R) le plan passant par le point W(1 ; 4 ; 1) et parallèle au plan (Q).

On considère dans (R) le cercle (C) de centre W et de rayon 3.

1) Trouver une équation de (R).

2) Prouver que B (3 ; 2 ; 0) est un point de (C).

3) Ecrire un système d'équations paramétriques de la tangente (T) en B à (C).

III- (3 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M ' d'affixe z' telle que $z' = (\overline{z} - 2)(\overline{z} + 1)$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

On désigne par (x ; y) les coordonnées de M et par (x ' ; y ') celles de M ' .

1) Calculer x ' et y ' en fonction de x et y et montrer que lorsque M ' varie sur l'axe des ordonnées, M varie sur la courbe (C) d'équation: $x^2 - y^2 - x - 2 = 0$.

2) a- Prouver que (C) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et les foyers.

b- Tracer (C).

3) Soit E le point de (C) d'abscisse 3 et d'ordonnée positive.

a- Ecrire une équation de la tangente (t) en E à (C).

b- La droite (t) coupe les asymptotes de (C) en P et Q. Prouver que E est le milieu de [PQ].

4) On désigne par (D) le domaine limité par (C) et la droite d'équation x = 3.

Calculer le volume engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.

IV- (3 points)

Une urne contient $n+10$ boules ($n \geq 2$): n boules blanches, 6 boules rouges et 4 boules noires.

A- On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.

1) Calculer la probabilité $q(n)$ de tirer deux boules blanches.

2) On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

a- Montrer que $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 42}{(n+10)(n+9)}$.

b- Vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n) = \lim\limits_{n \to +\infty} q(n)$. Interpréter ce résultat.

c- Existe-t-il un cas où $p(n) = \dfrac{31}{105}$?

B- On suppose dans cette partie que n = 3.

Un jeu consiste à tirer simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.

Si les 2 boules tirées sont de même couleur, le joueur marque + 4 points ; sinon, il marque –1 point.

Le joueur répète le jeu deux fois en remettant, après le premier jeu, les boules tirées dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués par le joueur.

1) Justifier que les valeurs de X sont : –2 ; 3 et 8.

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

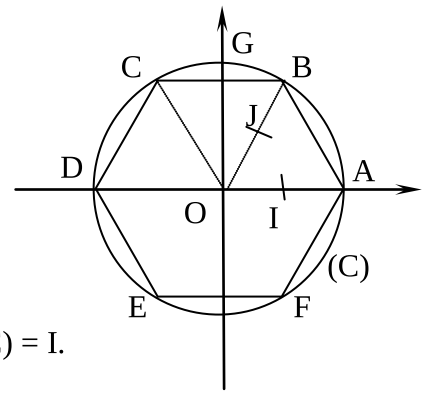
3) Calculer l'espérance mathématique E(X).

V- (3 points)

Dans un plan orienté on donne un hexagone régulier direct ABCDEF de centre O, tel que $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

(C) est le cercle circonscrit à cet hexagone.

I et J sont les milieux respectifs de [OA] et [OB].



Soit S la similitude qui transforme A en B et B en J.

1) a- Déterminer le rapport et un angle de S.

b- Démontrer que S(D) = A. Trouver S(O) et vérifier que S(C) = I.

c -Déterminer l'image de l'hexagone ABCDEF par S

2) Le cercle (C') est l'image de (C) par S. Déterminer le centre et le rapport de chacune des deux homothéties qui transforme (C) en (C').

3) G est le milieu de l'arc BC sur le cercle (C).

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG})$.

a-Trouver l'affixe de chacun des points B, C, E et F.

b- Écrire la forme complexe de S et déduire l'affixe de son centre W.

c- H est le point de rencontre de [AJ] et [BI]. Déterminer le point H' image de H par S.

VI- (7 points)

Soit f la fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A- 1) Calculer f '(x) et déterminer le sens de variations de f sur $]0;+\infty[$.

2) a- Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c- Dresser le tableau de variations de f.

d- Déduire que l'équation $x^2 + \ln x = 0$, admet une solution unique α et que $0,6 < \alpha < 0,7$.
Etudier le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

3) a- Démontrer que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera l'abscisse.
b- Tracer (C).

4) a- Démontrer que f admet sur I, une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera le domaine de définition.

b- Soit (C') la courbe représentative de f^{-1}. Prouver que le point A(1;1) est commun à (C) et (C') et tracer (C') dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c- Ecrire une équation de la tangente en A à (C').

d- Soit S(α) l'aire du domaine limité par (C), (C'), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
Calculer S(α).

B- Soit (T) la courbe représentative de la fonction h définie sur I = $]0;+\infty[$ par h(x) = lnx.

1) Etudier la position relative de (C) et (T) et tracer (T) dans le même repère que (C).

2) Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.

a- Calculer g'(x) et vérifier que $g'(x) = \dfrac{2}{x} f(x)$.

b- En déduire le sens de variations de g sur I.

3) Soit M_0 le point de (T) d'abscisse α et M un point quelconque de (T) d'abscisse x.

a- Calculer OM_0^2 en fonction de α et OM^2 en fonction de x.

b- Prouver que $OM_0 \le OM$ pour tout x de I.

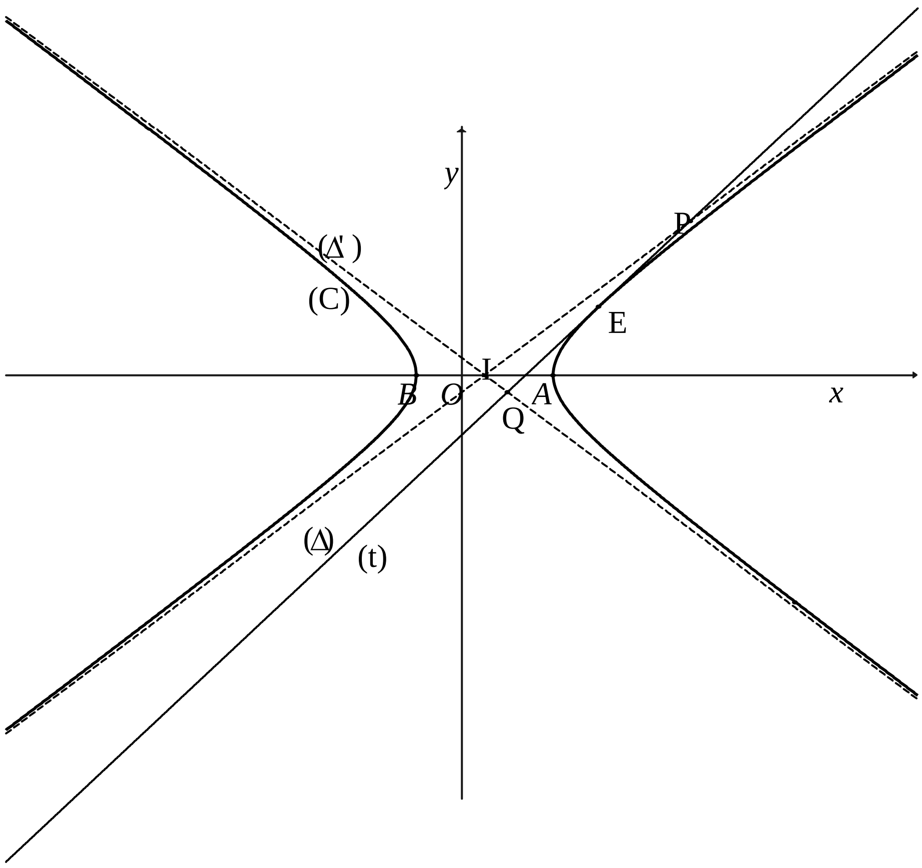
c- Démontrer que la tangente en M_0 à (T) est perpendiculaire à (OM_0).

مشروع معيار التصحيح	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم عامة	دورة سنة ٢٠٠٨ الاكمالية الاستثنائية

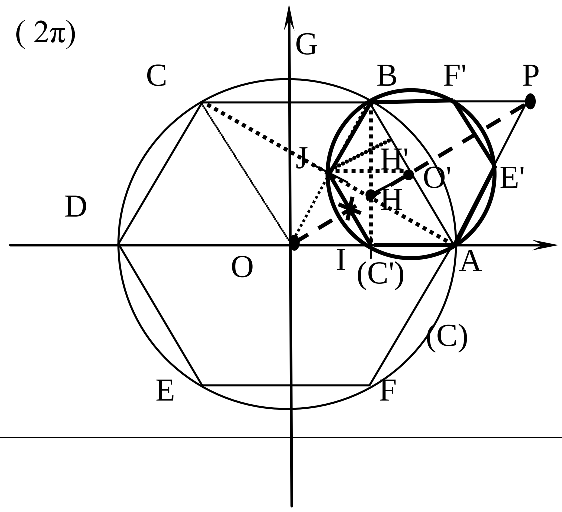
QI	Corrigé	Note
1	$f(x)=\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ Pour $x=-\sqrt{3}$, $f(x)=\pi+2\arctan(x)$ (a)	1
2	La dérivée d'ordre n de f est $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ .car la dérivée d'ordre 2 est $-1/x^2$ (b)	1
3	Le nombre de rectangles dans cette figure est $C_5^2\times C_4^2=60$ (a)	0.5
4	La fonction $f(x)=e^{2x}+2x-1$ est continue et strictement croissante sur IR de $-\infty$ à $+\infty$, donc l'équation $e^{2x}+2x-1=0$, admet dans *IR* une seule racine (c)	1
5	$z=e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}$. (c)	0.5

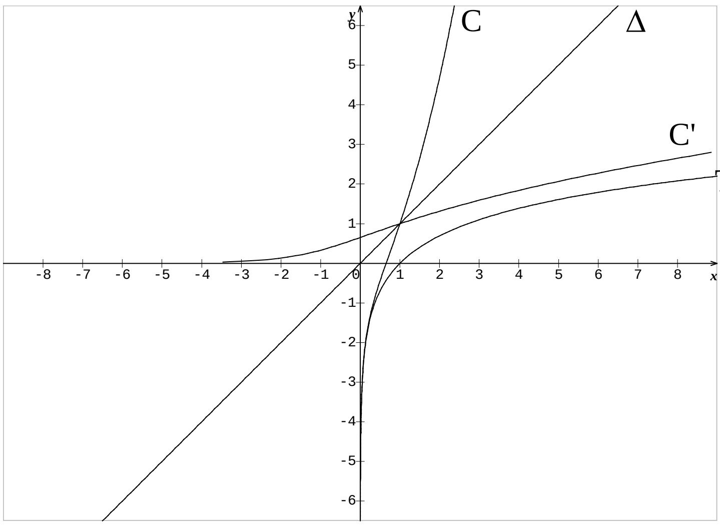
QII	Corrigé	Note
A1	$\vec{N}_P(2\,;-2\,;-1)$ et $\vec{N}_Q(2\,;1\,;2)$ avec $\vec{N}_P.\vec{N}_Q=0$,donc (P) est perpendiculaire à (Q)	0.5
A2	Pour tout t : $\begin{cases}2t-2(2t+3)-(-2t-2)+4=0\\2t+(2t+3)+2(-2t-2)+1=0\end{cases}$ alors (D) est l'intersection de (P) et (Q).	0.5
A3	H = proj(A/(D)) ; $f(t)=AH^2=(t-2)^2+(2t+6)^2+(2t+7)^2$ avec $f'(t)=0$ d'où $t=-8/3$ et $H(-8/3\,;-7/3\,;10/3)$	1
B1	(R) // (Q) ; (R): $2x+y+2z+r=0$ avec (R) passe par W(1 ; 4 ; 1). $2(1)+4+2(1)+r=0$; $r=-8$; (R) : $2x+y+2z-8=0$	0.5
B2	B est un point de (R) car $2(3)+2+2(0)-8=0$ avec WB = 3, donc $B\in(C)$.	1
B3	Pour tout point M(x ; y ; z) de (T) on a : $\vec{BM}$ et $(\vec{BW}\wedge\vec{N}_R)$ sont colinéaires ; $\vec{BW}\wedge\vec{N}_R(3\,;6\,;-6)$ (T) : $x=k+3$; $y=2k+2$, $z=-2k$ (k : paramètre réel)	0.5

QIII	Corrigé	Note
1	$z'=(\bar{z}-2)(\bar{z}+1)=\bar{z}^2-\bar{z}-2=x^2-y^2-x-2+(y-2xy)i$. D'où $x'=x^2-y^2-x-2$ et $y'=y-2xy$. $M'\in y'y \Leftrightarrow x'=0 \Leftrightarrow x^2-y^2-x-2=0$.	1
2a	$x^2-y^2-x-2=0\Leftrightarrow\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-y^2-2-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{9}{4}$. Donc (C) est une hyperbole équilatère de centre $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ et d'axe focal $x'x$ avec $a^2=b^2=\frac{9}{4}$ et $c=a\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Sommets: $A\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\,;0\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\,;0\right)$; soit $A(2\,;0)$ et $B(-1\,;0)$. Foyers: $F\left(\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\,;0\right)$ et $F'\left(\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\,;0\right)$.	1.5

2b	Asymptotes : (Δ) : $y = x - \frac{1}{2}$ et (Δ') : $y = -x + \frac{1}{2}$.  	1
3a	E(3 ; 2) ; (t) : $(x_E - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) - yy_E = \frac{9}{4}$; $y = \frac{5}{4}x - \frac{7}{4}$	0.5
3b	$(t)\cap(\Delta)$: $\frac{5x-7}{4} = x - \frac{1}{2}$. D'où $x_P = 5$. $(t)\cap(\Delta')$: $\frac{5x-7}{4} = -x + \frac{1}{2}$. D'où $x_Q = 1$. $\frac{x_P + x_Q}{2} = 3 = x_E$ et P , Q et E sont alignés donc E est le milieu de [PQ] .	1
4	$V = \pi\int_2^3 y^2dx = \pi\int_2^3 (x^2 - x - 2)dx = \pi[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x]_2^3 = \frac{11}{6}\pi u^3$	1

QIV	Corrigé	Note
A1	$q(n) = \dfrac{C_n^2}{C_{n+10}^2} = \dfrac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$.	0.5
A2a	$p(n) = \dfrac{C_n^2}{C_{n+10}^2} + \dfrac{C_6^2}{C_{n+10}^2} + \dfrac{C_4^2}{C_{n+10}^2} = \dfrac{n(n-1)+30+12}{(n+10)(n+9)} = \dfrac{n^2-n+42}{(n+10)(n+9)}$.	1
A2b	$\lim\limits_{n\to+\infty} p(n) = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} q(n)$. Si le nombre de boules blanches est très grand, la probabilité d'avoir 2 boules blanches est égale à celle d'avoir 2 boules de la même couleur et cet événement est presque certain .	1
A2c	$\dfrac{n^2-n+42}{(n+10)(n+9)} = \dfrac{31}{105}$; $74n^2 - 694n + 1620 = 0$; $n = 5$ ou $n = 4{,}378$. D'où $n = 5$ (n est un entier naturel supérieur à 2)	1
B1	Les valeurs prises par X sont : $-1 - 1 = -2$, $4 - 1 = 3$ et $4 + 4 = 8$.	0.5
B2	p (les deux boules tirées sont de même couleur) = $p(3) = \dfrac{48}{13\times12} = \dfrac{4}{13}$. $p(X = -2) = (9/13)^2$; $p(X = 3) = 2\times 4/13 \times 9/13$ et $p(X = 8) = (4/13)^2$.	1.5
B3	$E(X) = (-2)(9/13)^2 + 2\times3\times 4/13 \times 9/13 + 8\times(4/13)^2 = 1{,}0769$.	0.5

QV	Corrigé	Note
1a	S(A) = B et S(B) = J ; Par suite le rapport est : $\frac{BJ}{AB} = \frac{1}{2}$ (hexagone régulier) et l'angle : $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BJ}) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$	0.5
1b	On a : $\frac{BA}{AD} = \frac{1}{2}$ et $(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ avec S(A) = B alors S(D) = A O est le milieu de [AD] et S([AD]) = [BA] Donc S(O) = O' milieu de [BA]. ABCO est un parallélogramme direct , donc son image par S est un parallélogramme direct qui ne peut être que BJIO', donc S(C) = I. .  	1
1c	Le transformé d'un hexagone régulier par une similitude est un hexagone régulier c'est l'hexagone BJIAE'F' * fig.*	0.5
2	Les homothéties qui transforment (C) en (C') sont : Une homothétie positive de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre le point P tel que $\overrightarrow{PO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PO}$ et une homothétie négative de rapport $-\frac{1}{2}$ et de centre le point K tel que $\overrightarrow{KO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KO}$.	1.5
3a	$B(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$; $C(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$; $E(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $F(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$	1
3b	La forme complexe est Z = az + b avec S(O) = O' ; $O'(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4})$ d'où $z_{O'} = b$ et $a = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $b = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ d'où $Z = (-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4})z + \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ $Z_W = \frac{b}{1-a} = \frac{3}{7} + 2i\frac{\sqrt{3}}{7}$	1
3c	H est l'orthocentre du triangle équilatéral OAB son image est l'orthocentre du triangle équilatéral O'BJ = S(OAB) ** Ou $H(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6})$ Son image H' a pour affixe $Z_{H'} = az_H + b = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{3}$	0.5

QVI	Corrigé	Note
A1	$f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$ or $x > 0$ donc $f'(x) > 0$ et pour tout x de I f est strictement croissante sur I.	0.5
A2a	$\lim\limits_{x\to 0} \ell n\, x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ d'où $x = 0$ (A.V).	0.5
A2b	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ell n\, x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\dfrac{f(x)}{x} = x + \dfrac{\ell n\, x}{x}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$	1
A2c	$\begin{array}{c\|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & & & +\infty \\ & -\infty & \nearrow & \end{array}$	0.5
A2d	f est continue et strictement croissante sur I et elle croît de $-\infty$ à $+\infty$, donc elle s'annule une fois en changeant de signe d'où l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α, en plus $f(0,6)\times f(0,7) < 0$ (f(0,6)=-0,15 et f(0,7)=0,133). Donc $0,6 < \alpha < 0,7$ et $f(x) < 0$ pour $0 < x < \alpha$; $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$.	1
A3a	$f''(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$; $f''(x) = 0$ pour $2x^2 = 1$ donc $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ or $x > 0$ donc $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ en plus $f''(x) < 0$ pour $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $f''(x) > 0$ pour $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc (C) admet un point d'inflexion W d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	1
A3b		0.5
A4a	f est continue et strictement croissante sur I, donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} qui est définie sur $f(I) =]-\infty;+\infty[$	0.5

A4b	f(1) = 1 donc A(1;1) est un point commun à (C) et (C’) car $x_A = y_A$ et $A \in (C)$ et on trace (C') par symétrie de (C) par rapport à la droite $(\Delta): y = x$.	1
A4c	La tangente en A à (C): $y - y_A = f'(1)(x-1)$ d'où $y - 1 = 3(x-1)$ et $y = 3x - 2$ donc la tangente en A à (C') a pour équation: $x = 3y - 2$ d'où $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$	1
A4d	à cause de la symétrie par rapport à (Δ) on peut écrire $S(\alpha) = A(\alpha) = 2\left[\int_0^1 x\,dx - \int_\alpha^1 f(x)dx\right]$ or $\int_\alpha^1 \ell n\,x\,dx = \left[x\ell n\,x - x\right]_\alpha^1 = -1 - \alpha\ell n\alpha + \alpha$ $\begin{pmatrix} \text{On pose } u' = 1 & u = x \\ v = \ell n\,x & v' = \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ D'où $S(\alpha) = A(\alpha) = 2[\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^1 + 1 + \alpha\ell n\alpha - \alpha] =$ $= 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\alpha^3}{3} + 1 + \alpha\ell n\alpha - \alpha\right]$ $= \frac{7}{3} + \frac{2\alpha^3}{3} + 2\alpha\ell n\alpha - 2\alpha$	1.5
B1	$f(x) - \ln x = x^2 > 0$ pour $x > 0$ donc (C) est au – dessus de (T) et on trace (T).	1
B2a	$g'(x) = 2x + 2\ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x}\left(x^2 + \ln x\right) = \frac{2}{x}f(x)$ donc sur I, g'(x) a le même signe que f(x)	1
B2b	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \alpha & & +\infty \\ \hline g'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline g(x) & & \searrow & & \nearrow & \end{array}$	0.5
B3a	$OM_0^2 = \alpha^2 + (\ln\alpha)^2 = g(\alpha)$ et $OM^2 = x^2 + (\ln x)^2 = g(x)$	0.5
B3b	$g(\alpha)$ est la valeur minimale de g(x) donc $g(\alpha) \le g(x)$ pour tout x > 0 par suite $OM_0^2 \le OM^2$ c'est –à- dire $OM_0 \le OM$ pour tout point M de (T).	1
B3c	Coefficient directeur de $OM_0 = \frac{\ln\alpha}{\alpha}$.Coefficient directeur de la tangente en M_0 à (T) est $\frac{1}{\alpha}$. Car la dérivée de $\ln x$ est $\frac{1}{x}$. Or $\alpha^2 + \ln\alpha = 0$ donc $\ln\alpha = -\alpha^2$ d'où : $\frac{\ln\alpha}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{\ln\alpha}{\alpha^2} = -1$ donc la tangente en M_0 à (T) est perpendiculaire à (OM_0) .	1