وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات شهادة الثانوية العامة فرع العلوم العامة	دورة سنة ٢٠٠٦ الاستثنائية
عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I – (1,5 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	$z=-2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$. Un argument de z est :	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
2	L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x^2-2x+2)>0$ est :	IR	$]0\,;+\infty[$	$IR-\{1\}$	$]1\,;+\infty[$
3	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=$	1	-1	$+\infty$	$-\infty$
4	z et z ' sont deux nombres complexes. Si $z'=\frac{\overline{z}-i}{z+i}$ alors $\lvert z'\rvert=$	$\lvert z\rvert$	2	$\lvert z\rvert\times\lvert\overline{z}\rvert$	1

II-(2,5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ on donne les points $A(1 ; -1 ; 1)$, $B(2 ; 0 ; 3)$, $C(-1 ; 1 ; 1)$ et $G(4 ; 2 ; 4)$.
On désigne par (P) le plan déterminé par A, B et C.

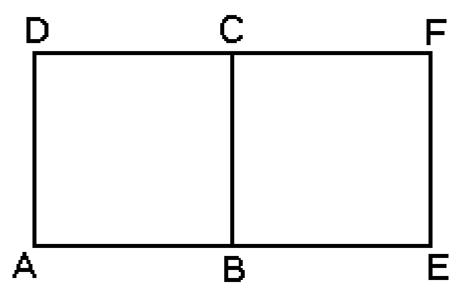
1) a- Calculer l'aire du triangle ABC.
   b- Calculer le volume du tétraèdre GABC et déduire la distance de G au plan (P).

2) Prouver que $x + y - z + 1 = 0$ est une équation du plan (P).

3) a- Montrer que le point $F(2 ; 0 ; 6)$ est symétrique de G par rapport au plan (P).
   b- Donner un système d'équations paramétriques de la droite (d) symétrique de la droite (AF) par rapport au plan (P).
   c- Démontrer que la droite (AB) est une bissectrice de l'angle $\widehat{FAG}$.

III-(3 points)

Dans un plan orienté on donne deux carrés directs ABCD et BEFC.
Soit S la similitude plane directe qui transforme A en E et E en F.



1) a- Déterminer le rapport k et un angle α de S.
   b- Construire géométriquement le centre W de S.
   c- Trouver le point G transformé de F par S.

2) Soit h la transformation définie par $h = S \circ S$.
   a- Déterminer la nature et les éléments de h.
   b- Préciser h (A) et exprimer $\overrightarrow{WA}$ en fonction de $\overrightarrow{WF}$.

3) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD})$.
   a- Déterminer les affixes des points E, F et W.
   b- Trouver la forme complexe de S.
   c- Donner la forme complexe de h et trouver l'affixe de h(E).

IV- (3 points)

On dispose de deux boîtes identiques B_1 et B_2 .

Dans la boîte B_1 il y a **quatre** boules rouges et **deux** boules blanches et dans la boîte B_2 il y a **quatre** boules rouges**, trois** boules blanches et **une** boule noire.

A- On met les deux boîtes B_1 et B_2 dans un même sac. On tire au hasard **une** boîte de ce sac puis on tire au hasard et simultanément **trois** boules de cette boîte.

1) Soit les événements suivants :

E : « les boules tirées sont trois boules rouges de la boîte B_1».

F : « les trois boules tirées sont rouges ».

a- Montrer que la probabilité de E est égale à $\frac{1}{10}$.

b- Calculer la probabilité de F.

2) a- Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire parmi les trois boules tirées ?

b- Quelle est la probabilité de tirer trois boules de trois couleurs différentes ?

B- On met toutes les boules des deux boîtes B_1 et B_2 dans une urne U.

On tire simultanément et au hasard **trois** boules de l'urne U.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer l'espérance mathématique E(X).

V-(2,5 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne l'hyperbole (H) d'équation $x^2 - 3y^2 = 3$.

1) a- Déterminer les coordonnées des sommets et des foyers de (H) et trouver son excentricité.

b- Ecrire les équations des asymptotes et des directrices de (H).

c- Tracer l'hyperbole (H).

2) Soit (D) le domaine limité par l'hyperbole (H) et la droite d'équation $x = 2$.

Calculer le volume engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.

3) On désigne par K et L les points de (H) d'abscisse 2.

Montrer que les tangentes à (H) en K et L se coupent sur une directrice de (H).

VI- (7,5 points)

A - Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 6xe^{-2x}$.

On pose $z = y - 3x^2e^{-2x}$.

1) Ecrire une équation différentielle (E') satisfaite par z et résoudre (E').

2) Déduire la solution générale de (E) et trouver une solution particulière y de (E) qui vérifie y(0) = 0.

B- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 3x^2e^{-2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2) a- Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.

b- Démontrer que la courbe (C) admet deux points d'inflexion.

3) a- Tracer la courbe (C).

b- Déterminer, suivant les valeurs du réel m, le nombre de racines de l'équation : $me^{2x} - 3x^2 = 0$.

4) Soit F la fonction définie sur IR par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$.

a- Déterminer a, b et c pour que F soit une primitive de f.

b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -1 et x = 0.

5) La tangente à (C) au point $A(1; 3e^{-2})$ recoupe la courbe (C) au point E d'abscisse t .

a- Vérifier que $-0,3 < t < -0,2$.

b- Soit h la fonction définie, sur IR, par $h(x) = -e^{x-1}$. Démontrer que h (t) = t.

6) Soit g la fonction définie par $g(x) = e^{f(x)}$.

a- Dresser le tableau de variations de g.

b- Trouver le nombre de solutions de l'équation g(x) = e.

c- Résoudre l'inéquation g(x) > 1.

SCIENCES GENERALES – $2^{ème}$ SESSION 2006– MATHEMATIQUES			
I			N
1	$z = -2\,e^{-i\frac{5\pi}{6}} = 2\,e^{i(\frac{-5\pi}{6}+\pi)} = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$	b	3
2	$\ln(x^2 - 2x + 2) > 0$; $x^2 - 2x + 2 > 1$; $(x-1)^2 > 0$; $x \neq 1$.	c	
3	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ avec $t = \frac{1}{x}$.	a	
4	$\lvert z' \rvert = \frac{\lvert \bar{z} - i \rvert}{\lvert z+i \rvert} = \frac{\lvert \overline{z+i} \rvert}{\lvert z+i \rvert} = 1$	d	

II		
1.a	$S = \frac{\lVert \vec{AB} \wedge \vec{AC} \rVert}{2}$; $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = -4\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$; $S = 2\sqrt{3}\ u^2$.	1/2
1.b	$V = \frac{\lvert \vec{AG}.(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \rvert}{6} = \frac{\lvert -12 \rvert}{6} = 2\ u^3$; $V = \frac{d \times S}{3}$ d'où $d = \frac{3V}{S} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ u.	1
2	$\vec{AM}.(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$; $-4(x-1) - 4(y+1) + 4(z-1) = 0$; $x + y - z + 1 = 0$ ⇨OU : Les coordonnées de A , B et C vérifient l'équation de (P) .	1/2
3.a	$\vec{FG}(2\,;2\,;-2)$; $\vec{N_P}(1\,;1\,;-1)$; $\vec{FG} = 2\vec{N_P}$ donc $(FG) \perp (P)$. I milieu de [FG] ; I(3 ; 1 ; 5) ; 3 + 1 – 5 + 1 = 0 donc I appartient à (P). ⇨OU : on démontre que (P) est le plan médiateur de [FG].	1
3.b	(d) est la droite (AG) : x = 3m + 1 ; y = 3m – 1 et z = 3m + 1.	1
3.c	(AI) est la bissectrice de $\widehat{FAG}$ car AF = AG et I milieu de [FG], or $\vec{AI}(2;2;4)$ et $\vec{AB}(1;1;2)$ donc $\vec{AI} = 2\vec{AB}$ et B appartient à la droite (AI)	1

III		
1.a	S(A) = E ; S(E) = F. $k = \frac{EF}{AE} = \frac{1}{2}$; $(\vec{AE}, \vec{EF}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$.	1/2
1.b	On a $\alpha = (\vec{WA}, \vec{WE}) = \frac{\pi}{2}$ d'où W appartient au cercle de diamètre [AE] ; $(\vec{WE}, \vec{WF}) = \frac{\pi}{2}$ d'où W appartient au cercle de diamètre [EF] ; W est donc le point commun aux deux cercles , autre que E (S(E) = F ≠E).	1/2
1.c	S(E) = F et S(F) = G d'où $(\vec{EF}, \vec{FG}) = \frac{\pi}{2}$ et G appartient à la demi droite [FD) et $\frac{FG}{EF} = \frac{1}{2}$ d'où G est le milieu de [FC].	1/2
2.a	h est une similitude directe de centre W de rapport $\frac{1}{4}$ et d'angle π c'est donc l'homothétie négative de centre W et de rapport $-\frac{1}{4}$.	1

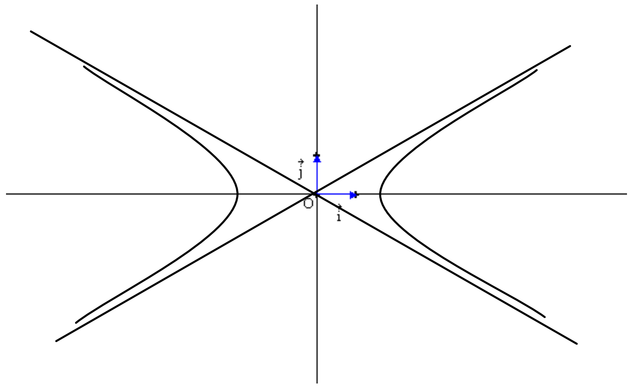
2.b	S(A) = E et S(E) = F donc h(A) = S(S(A)) = S(E) = F, d'où $\overrightarrow{WF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{WA}$.	1/2
3.a	$z_E = 2$; $z_F = 2 + i$; $\overrightarrow{WF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{WA}$; $z_F - z_W = -\frac{1}{4}(z_A - z_W)$; $z_W = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$	1
3.b	$z' - z_W = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_W)$; $z' - \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i = \frac{1}{2}i\,(z - \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i)$; $z' = \frac{1}{2}i\,z + 2$	1
3.c	$z' - z_W = -\frac{1}{4}(z - z_W)$; $z' = = -\frac{1}{4}z + 2 + i$ Pour z = 2 ; $z' = -\frac{1}{2} + 2 + i = \frac{3}{2} + i$.	1

IV		
A1.a	$P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{20} = \frac{1}{10}$.	1/2
A1.b	P(F) = P(3rouges de B_1) + P(3 rouges de B_2) = $\frac{1}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{56} = \frac{19}{140}$	1
A2.a	Obtenir une boule noire parmi les trois boules tirées revient à choisir B_2 puis 1noire et 2 non noires de B_2 ; $p_1 = \frac{1}{2} \times \frac{C_1^1 \times C_7^2}{C_8^3} = \frac{1}{2} \times \frac{21}{56} = \frac{3}{16}$.	1
A2.b	Obtenir 3 boules de couleurs différentes revient à choisir B_2 puis une boule de chaque couleur; $p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{C_8^3} = \frac{12}{2 \times 56} = \frac{3}{28}$.	1
B1	Les valeurs possibles de X sont 0 ; 1 ; 2 et 3.	2

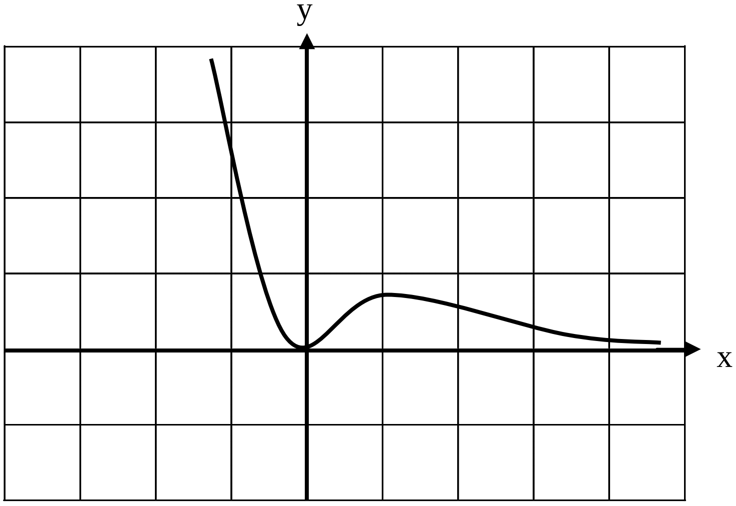
x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{C_9^3}{C_{14}^3} = \frac{84}{364}$	$\frac{C_5^1 \times C_9^2}{C_{14}^3} = \frac{180}{364}$	$\frac{C_5^2 \times C_9^1}{C_{14}^3} = \frac{90}{364}$	$\frac{C_5^3}{C_{14}^3} = \frac{10}{364}$

B2	E(X) = 390/364 = 1,07	1/2

V		
1.a	$x^2 - 3y^2 = 3$. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$. $a^2 = 3$ d'où les sommets A($\sqrt{3}$; 0) et A'($-\sqrt{3}$; 0). $c^2 = a^2 + b^2 = 4$ d'où les foyers F(2 ; 0) et F'(– 2 ; 0) . $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.	11/2
1.b	Les asymptotes de (H) ont pour equations : $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ et $y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x$. Directrices : $x = \frac{a^2}{c} = \frac{3}{2}$; $x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{3}{2}$.	1

		1/2
2	$V = \pi \int_{\sqrt{3}}^{2} y^2 dx = \pi \int_{\sqrt{3}}^{2} (\frac{x^2}{3} - 1)dx = \pi \left[\frac{x^3}{9} - x \right]_{\sqrt{3}}^{2} = \frac{6\sqrt{3} - 10}{9}$ u^3.	1
3	Pour x = 2 , $y^2 = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, soit $K(2 ; \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $L(2 ; -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Equation de la tangente en K : $y = f'(x_K)(x - x_K) + f(x_K)$; $2x - 6yy' = 0$; $y' = \frac{x}{3y}$. $y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 2) + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \sqrt{3}$. Par symétrie , l'équation de la tangente en L est $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}$ Les deux asymptotes se coupent en un point d'abscisse $x = \frac{3}{2}$ qui est un point de la directrice	1

VI		
A1	$y = z + 3x^2e^{-2x}$; $y' = z' + 3(2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x})$; $z' + 2z = 0$ (E') ; $z = Ce^{-2x}$.	1 1/2
A2	$y = Ce^{-2x} + 3x^2e^{-2x}$; $y(0) = 0$ nous donne C = 0 et $y = 3x^2e^{-2x}$.	1
B1a	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{e^{2x}} = 3 \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 = 0$; l'axe des abscisses est une asymptote à (C) en $(+\infty)$	1
B1b	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 3xe^{-2x} = -\infty$ (C) admet une direction asymptotique verticale(celle de l'axe des ordonnées)	1
B2a	$f'(x) = 6x(1-x)\,e^{-2x}$ $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow & 0 & \nearrow & 3e^{-2} & \searrow & 0 \end{array}$	1

B2b	$f''(x) = 6e^{-2x}(2x^2 - 4x + 1)$ $f''(x)$ s'annule deux fois en changeant de signe aux points d'abscisses $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, donc (C) a deux points d'inflexion.	1
B3a		11/2
B3b	$me^{2x} = 3x^2$; $m = 3x^2e^{-2x}$ Pour $m < 0$ pas de racines Pour $m = 0$ une racine double Pour $0 < m < 3e^{-2}$; trois racines Pour $m = 3e^{-2}$ une racine simple et une autre double. Pour $m > 3e^{-2}$ une racine	1
B4a	F'(x) = f(x) nous donne : $(2ax + b)e^{-2x} - 2e^{-2x}(ax^2 + bx + c) = 3x^2e^{-2x}$; $-2a = 3$; $2a - 2b = 0$ et $b - 2c = 0$ $a = -3/2$; $b = -3/2$ et $c = -3/4$; $F(x) = -\frac{3}{2}(x^2 + x + \frac{1}{2})e^{-2x}$	1
B4b	$A = \left[-\frac{3}{2}(x^2 + x + \frac{1}{2})e^{-2x}\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{4}(e^2 - 1)$ u^2.	1
B5a	$3e^{-2} = 0{,}406$; $f(-0{,}3) = 0{,}4919 > 0{,}406$ et $f(-0{,}2) = 0{,}179 < 0{,}406$ donc $-0{,}3 < t < -0{,}2$. ⇨OU : $f(-0{,}3) - 3e^{-2} = 0{,}0859 > 0$ et $f(-0{,}2) - 3e^{-2} = -0{,}227 < 0$.	1
B5b	$3t^2e^{-2t} = 3e^{-2}$; $t^2\frac{e^{-2t}}{e^{-2}} = 1$; $e^{-2t+2} = \frac{1}{t^2}$; $\left[e^{-(t-1)}\right]^2 = \frac{1}{t^2}$; $e^{-(t-1)} = -\frac{1}{t}$ (car $t < 0$) d'où $h(t) = t$.	1
B6a	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline g'(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline g(x) & +\infty & \searrow & 1 & \nearrow & e^{3e^{-2}} & \searrow & 1 \end{array}$	1
B6b	$g(x) = e$; $e^{f(x)} = e$; $f(x) = 1$; or (C) coupe la droite d'équation $y = 1$ en un seul point donc l'équation $g(x) = e$ admet une solution unique .	1/2
B6c	$g(x) > 1$; $f(x) > 0$ donc $x \neq 0$. ⇨OU : d'après le tableau de variations de g.	1/2